

**МАТЕМАТИКА
И
ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ**

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Выпуск 21



Ярославль 2026

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Ярославский государственный технический университет»

МАТЕМАТИКА И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Выпуск 21

Ярославль
Издательство ЯГТУ
2026

УДК 51:378

ББК 22.1

М34

М34 Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 21. – Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2026. – 168 с.

ISBN 978-5-9914-1106-6

В сборнике представлены научные работы, посвященные актуальным вопросам математики, математического моделирования, а также вопросам методики преподавания математики и проведению математических олимпиад.

УДК 51:378

ББК 22.1

Редакционная коллегия: А. Н. Жаров (председатель), А. Б. Капранова,
Ю. К. Оленикова, В. Ш. Ройтенберг.

Рецензенты: кафедра «Экономика и финансы» Ярославского филиала Финансового университета при правительстве Российской Федерации; Д.Ф. Белоножко, д-р физ.-мат. наук, доцент кафедры микроэлектроники и общей физики ФГБОУ ВО «ЯрГУ им. П.Г. Демидова».

ISBN 978-5-9914-1106-6

© Ярославский государственный
технический университет, 2026

МАТЕМАТИКА

УДК 515.177

М. А. Башкин

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П.А. Соловьева
Россия, г. Рыбинск, e-mail: mbashkin@rsatu.ru

ГАРМОНИЧЕСКИЕ И T-ИНВАРИАНТНЫЕ ФОРМЫ

Пусть T – это m -мерный комплексный тор. В работе показано, что пространства гармонических и T -инвариантных (p,q) -форм на торе совпадают.

Ключевые слова: комплексный тор, супермногообразие, гармоническая форма, инвариантная форма

M. A. Bashkin

P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University
Russia, Rybinsk, e-mail: mbashkin@rsatu.ru

HARMONIC AND T-INVARIANT FORMS

Let T be an m -dimensional complex torus. We show that the spaces of harmonic and T -invariant (p,q) -forms on the torus coincide.

Keywords: complex torus, supermanifold, harmonic form, invariant form

Определим m -мерный комплексный тор T как фактор группу C^m по дискретной подгруппе ранга $2m$ в C^m . Тор T является компактной комплексной абелевой группой Ли. Стандартные координаты комплексного пространства порождают локальные координаты в окрестности любой точки многообразия T . Обозначим их z_1, z_2, \dots, z_m . Так как при прибавлении к переменной любого комплексного числа дифференциальные формы dz_1, dz_2, \dots, dz_m не меняются, то они определены глобально. В силу двойственности векторные поля $\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_m}$ также будут определены глобально. Касательное и кокасательное расслоения над T тривиальны, dz_i и $\frac{\partial}{\partial z_i}$ – базисные сечения этих векторных расслоений.

Пусть $\Phi_{0,q}$ – пучок гладких комплекснозначных форм типа $(0, q)$ на T . Известно (см. [1]), что тор является компактным элеровым многообразием с метрикой, индуцированной эрмитовой метрикой на C^n . В этом случае $\alpha \in \Gamma(T, \Phi_{0,q})$ является гармонической тогда и только тогда, когда она антиголоморфна. Любая форма $\alpha \in \Gamma(T, \Phi_{0,q})$ может быть представлена в виде

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq m} a_{i_1 \dots i_q}(z, \bar{z}) d\bar{z}_{i_1} \dots d\bar{z}_{i_q}, \quad (1)$$

где $a_{i_1 \dots i_q}(z, \bar{z})$ – гладкие глобально определенные функции, $z = (z_1, \dots, z_m)$, $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$.

На торе T любая антиголоморфная функция постоянна, тогда форма $\alpha \in \Gamma(T, \Phi_{0,q})$ является гармонической тогда и только тогда, когда

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq m} a_{i_1 \dots i_q} d\bar{z}_{i_1} \dots d\bar{z}_{i_q}, \text{ где } a_{i_1 \dots i_q} \in C.$$

Рассмотрим действие группы T на себе при помощи сдвигов. Очевидно, что формы вида $d\bar{z}_{i_1} \dots d\bar{z}_{i_q}$, являются T -инвариантными. Но тогда формы вида (1) T -инвариантны тогда и только тогда, когда $a_{i_1 \dots i_q} \in C$. Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Любая $(0, q)$ -форма T -инвариантна тогда и только тогда, когда она является гармонической.*

Рассмотрим теперь тривиальное голоморфное векторное расслоение ранга n над комплексным m -мерным тором. Обозначим его $E = T \times C^n$. Пусть ξ_1, \dots, ξ_n – базис слоя C^n . Тогда с E связано расщепимое комплексное супермногообразие, касательный пучок которого определяет суперкасательное расслоение ST . Оно тривиально (см. [2, 3]). Базис сечений касательного пучка имеет вид

$$\xi_{i_1} \dots \xi_{i_k} \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad \xi_{i_1} \dots \xi_{i_k} \frac{\partial}{\partial \xi_l},$$

$$1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n, \quad j = 1, \dots, m, \quad l = 1, \dots, n.$$

Эти формы являются T -инвариантными.

Рассмотрим (p, q) -формы:

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_q} \left(\sum_{\substack{j_1 < \dots < j_p \\ i=1, \dots, m}} a_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q}(z, \bar{z}) \xi_{j_1} \dots \xi_{j_p} \frac{\partial}{\partial z_{i_1}} + \dots \right)$$

$$+ \sum_{\substack{j_1 < \dots < j_{p+1} \\ j=1, \dots, n}} b_{j_1 \dots j_{p+1}}^{j_1 \dots j_q} (z, \bar{z}) \xi_{j_1} \dots \xi_{j_{p+1}} \frac{\partial}{\partial \xi_j} d\bar{z}_{i_1} \dots d\bar{z}_{i_q},$$

где $a_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} (z, \bar{z})$ и $b_{j_1 \dots j_{p+1}}^{i_1 \dots i_q} (z, \bar{z})$ – гладкие глобально определенные функции на T . Форма α является гармонической тогда и только тогда, когда

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_q} \left(\sum_{\substack{j_1 < \dots < j_p \\ i=1, \dots, m}} a_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} \xi_{j_1} \dots \xi_{j_p} \frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{\substack{j_1 < \dots < j_{p+1} \\ j=1, \dots, n}} b_{j_1 \dots j_{p+1}}^{i_1 \dots i_q} \xi_{j_1} \dots \xi_{j_{p+1}} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) d\bar{z}_{i_1} \dots d\bar{z}_{i_q},$$

где $a_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q}, b_{j_1 \dots j_{p+1}}^{i_1 \dots i_q} \in C$.

Теперь из теоремы 1 следует

Теорема 2. Любая (p, q) -форма T -инвариантна тогда и только тогда, когда она является гармонической.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гриффитс Ф. Принципы алгебраической геометрии / Ф. Гриффитс, Дж. Харрис. М.: Мир, 1982. Т.1. 496 с.
2. Bashkin M. Supermanifolds corresponding to the trivial vector bundle over torus // Communications in Mathematics. 2023. Vol. 30 (2022), no. 3. P. 247–258.
3. Onishchik A.L. A Construction of Non-Split Supermanifolds // Annals of Global Analysis and Geometry. 1998. Vol. 16. P. 309–333.

УДК 519.6:004.8

А. Н. Жаров, И. Г. Миневичева

Ярославский государственный технический университет
Россия, Ярославль, e-mail: zharovan@ystu.ru, mineichevaig@ystu.ru

О РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ОПОРНЫХ ВЕКТОРОВ С ПОМОЩЬЮ СУБГРАДИЕНТНОГО МЕТОДА И МЕТОДА ПРОЕКЦИИ ГРАДИЕНТА

Проводится сравнение точности и сходимости субградиентного метода и метода проекции градиента на выпуклое множество в задаче бинарной классификации на основе метода опорных векторов. Показано, что оба метода дают приемлемую точность при решении задачи бинарной классификации. Однако метод проекции градиента является более удобным, так как позволяет лучше контролировать точность.

Ключевые слова: машинное обучение, бинарная классификация, метод опорных векторов, субградиентный метод, метод проекции градиента

A. N. Zharov, I. G. Mineicheva

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: zharovan@ystu.ru, zharovaig@ystu.ru

ON THE IMPLEMENTATION OF THE SUPPORT VECTOR METHOD USING THE SUBGRADIENT METHOD AND THE GRADIENT PROJECTION METHOD

The accuracy and convergence of the subgradient method and the gradient projection method on a convex set are compared in a binary classification problem based on the support vector machine. We show that both methods provide acceptable accuracy in solving the binary classification problem. However, the gradient projection method is more convenient because it allows better control over the accuracy.

Keywords: machine learning, binary classification, support vector machine, subgradient method, gradient projection method

Обычно для реализации метода опорных векторов используют готовые библиотеки libsvm и liblinear, подготовленные группой машинного обучения в национальном университете Тайваня. В настоящей же работе обсуждается вопрос об использовании для реализации метода опорных векторов субградиентного метода [1] и метода проекции градиента [2, 3].

Постановка задачи. Пусть у нас имеются объекты двух классов $y_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \{-1; +1\}$, $i = 1, 2, \dots, N$. Они схематично изображены на рис. 1. Разделим эти объекты на два класса гиперплоскостью γ с уравнением

$$w_0 + w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_mx_m = 0.$$

Из каждого класса выберем по одному объекту наиболее близкому к гиперплоскости γ .

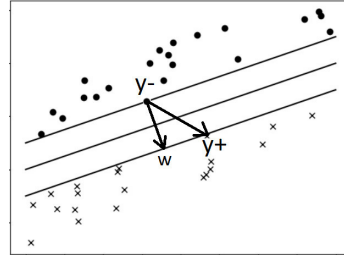


Рис. 1

Пусть такими объектами являются $y^+(x_1^+, x_2^+, \dots, x_m^+)$ и $y^-(x_1^-, x_2^-, \dots, x_m^-)$. Через объекты y^- и y^+ проведем соответственно гиперплоскости γ^- и γ^+ , параллельные гиперплоскости γ с уравнениями

$$\begin{aligned} \gamma^-: w_0 + w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_mx_m &= -1, \\ \gamma^+: w_0 + w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_mx_m &= +1. \end{aligned}$$

Найдем расстояние между гиперплоскостями γ^- и γ^+ . Для этого определим вектор с началом в точке y^- и концом y^+

$$y^-y^+ = (x_1^+ - x_1^-, x_2^+ - x_2^-, \dots, x_m^+ - x_m^-).$$

Спроектируем вектор y^-y^+ на нормальный вектор $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ гиперплоскости

$$\begin{aligned} \rho(\gamma^-, \gamma^+) &= \text{пр}_w = \frac{(y^-y^+, w)}{\|w\|} = \frac{(x_1^+ - x_1^-)w_1 + \dots + (x_m^+ - x_m^-)w_m}{\|w\|} = \\ &= \frac{1 - w_0 - (-1 - w_0)}{\|w\|} = \frac{2}{\|w\|}. \end{aligned}$$

Для хорошей разделимости объектов на классы расстояние $\rho(\gamma^-, \gamma^+)$ должно быть максимальным. Следовательно, величина $\|w\|/2$ должна быть минимальной.

Если какая-то часть объектов может находиться в полосе от γ^- до γ^+ , тогда можно ввести дополнительные переменные $\xi_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N$, характеризующие ошибку на i -м объекте. В этом случае задача оптимизации может быть записана в виде

$$\begin{cases} L = \frac{\|w\|^2}{2} + C \sum_{i=1}^N \xi_i \rightarrow \min, \\ y_i((x_i, w) + w_0) \geq 1 - \xi_i, & i = 1, 2, \dots, N \\ \xi_i \geq 0, & i = 1, 2, \dots, N, \end{cases} \quad (1)$$

где $C > 0$ - параметр, позволяющий учесть разный вклад в общую функцию первого и второго слагаемых.

Субградиентный метод оптимизации. Из второго неравенства системы (1) можно найти, что

$$\xi_i \geq 1 - y_i((x, w) + w_0) = 1 - M_i,$$

где M_i - это отступ (англ. *margin*).

Поскольку в данной задаче на минимум одно из неравенств $\xi_i \geq 0$, $\xi_i \geq 1 - M_i$ обязательно должно быть выполнено как равенство, то можно сделать вывод о том, что ξ_i равно положительной срезке величины $1 - M_i$, т.е. $\xi_i = (1 - M_i)_+$. Сама же задача оптимизации может быть записана в следующем виде

$$\begin{aligned} L(w_0; w) &= \frac{\|w\|^2}{2} + C \sum_{i=1}^N (1 - M_i)_+ = \\ &= \frac{1}{2}(w, w) + C \sum_{i=1}^N (1 - y_i((x_i, w) + w_0))_+ \rightarrow \min_w. \end{aligned} \quad (2)$$

Вычислим субпроизводную по параметру w_0

$$\frac{\partial L(w_0; w)}{\partial w_0} = \partial_{w_0} L(w_0^k; w^k) = \begin{cases} -C \sum_{i=1}^N y_i, & \text{если } 1 - y_i((x_i, w) + w_0) > 0, \\ 0, & \text{если } 1 - y_i((x_i, w) + w_0) \leq 0. \end{cases}$$

Вычислим также субдифференциал по вектору w

$$d_w L(w) = (w, dw) + \begin{cases} -C \sum_{i=1}^N y_i(x_i, dw), & \text{если } 1 - y_i((x_i, w) + w_0) > 0; \\ 0, & \text{если } 1 - y_i((x_i, w) + w_0) \leq 0. \end{cases}$$

Субградиент функции потерь по вектору w будет равен

$$\nabla_w L(w_0; w) = w + \begin{cases} -C \sum_{i=1}^N y_i x_i, & \text{если } 1 - y_i((x_i, w) + w_0) > 0; \\ 0, & \text{если } 1 - y_i((x_i, w) + w_0) \leq 0. \end{cases}$$

Для вычисления коэффициентов w_0 и w можно применить метод субградиента в виде итерационного процесса

$$\begin{cases} w_0^{k+1} = w_0^k - \alpha_k \partial_{w_0} L(w_0^k; w^k), \\ w^{k+1} = w^k - \alpha_k \nabla_w L(w_0^k; w^k), \quad k = 1, 2, \dots, k_{\max}, \alpha_k = \frac{\alpha}{k^p}, 0 < p \leq 1. \end{cases} \quad (3)$$

Для численного анализа была использована функция генерации объектов `make_classification(n_samples=50, n_features=4, n_classes=2, random_state=42)` из пакета `scikit-learn`. Результаты расчетов по формуле (3) представлены на рис. 2.

Двойственная задача. Для оптимизационной задачи (1) выпишем функцию Лагранжа

$$\begin{aligned} L &= \frac{(w, w)}{2} + C \sum_{i=1}^N \xi_i + \sum_{i=1}^N \lambda_i (1 - \xi_i - y_i((x_i, w) + w_0)) - \sum_{i=1}^N \eta_i \xi_i = \\ &= \frac{(w, w)}{2} + \sum_{i=1}^N \xi_i (C - \lambda_i - \eta_i) + \sum_{i=1}^N \lambda_i (1 - y_i((x_i, w) + w_0)). \end{aligned}$$

где λ_i – переменная, отвечающая неравенству $1 - \xi_i - y_i((x, w) + w_0) \leq 0$, а η_i – переменная, отвечающая неравенству $-\xi_i \leq 0$. Согласно условиям Каруша-Куна-Такера, к функции Лагранжа нужно добавить условия неотрицательности переменных $\lambda_i \geq 0, \eta_i \geq 0$ и условия дополнительной нежесткости. В результате получим систему ограничений

$$\begin{cases} \xi_i \geq 0, & \lambda_i \geq 0, & \eta_i \geq 0, & i = 1, 2, \dots, N \\ \eta_i \xi_i = 0, & \lambda_i (1 - \xi_i - y_i((x_i, w) + w_0)) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

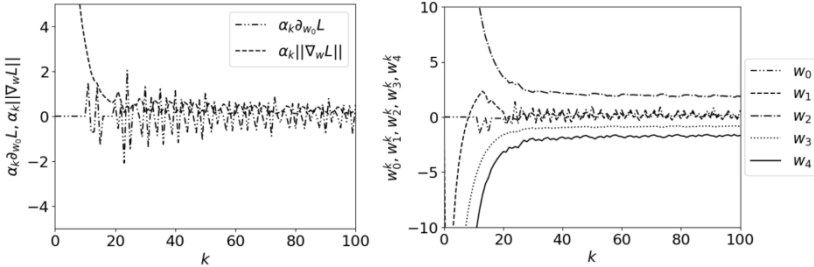


Рис. 2. Зависимости параметров $w_i^k, i = 0, 1, \dots, 4$, произведений шага субградиентного метода α_k на производную $\partial_{w_0} L$ и норму градиента $\|\nabla_w L\|$ от номера итерации k при $w_i^0 = 0, C = 5, p = 0.5, \alpha = 0.5$

Вычислим производные от функции Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial w_0} = - \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i; \quad \frac{\partial L}{\partial w} = w - \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i x_i, \quad \frac{\partial L}{\partial \xi_i} = \sum_{i=1}^N (C - \lambda_i - \eta_i).$$

Приравняв производные от функции Лагранжа к нулю, найдем

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i y_i = 0, \quad (5)$$

$$w = \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i x_i, \quad (6)$$

$$C = \lambda_i + \eta_i. \quad (7)$$

Поскольку $\lambda_i \geq 0, \eta_i \geq 0$, то из (7) можно определить, что $0 \leq \lambda_i \leq C$. Исходя из условий (4)–(7), все объекты можно классифицировать.

Если $\lambda_i = 0$, то $\eta_i = C$ и из условия дополнительной нежесткости системы (4) найдем $\xi_i = 0, M_i \geq 1$. Такие объекты называют периферийными или неинформативными.

Если $0 < \lambda_i < C$, то $0 < \eta_i < C$ и из условия дополнительной нежесткости системы (4) найдем $\xi_i = 0, M_i = 1$. Такие объекты x_i лежат в точности на гиперплоскости разделяющей классы. Их можно назвать опорными граничными объектами.

Если $\lambda_i = C$, то $\eta_i = 0$ и из условия дополнительной нежесткости системы (4) найдем $\xi_i > 0, M_i = 1 - \xi_i < 1$. Такой объект x_i можно назвать опорным нарушителем.

Используя условия (4), перепишем функцию Лагранжа в виде

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j y_i y_j (x_i, x_j) + \sum_{i=1}^N \lambda_i - \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i (x_i, w) - w_0 \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i = \\ &= \sum_{i=1}^N \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j y_i y_j (x_i, x_j) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_j \lambda_i y_i y_j (x_i, x_j) = \\ &= \sum_{i=1}^N \lambda_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j y_i y_j (x_i, x_j). \end{aligned}$$

Следовательно, задача оптимизации будет иметь вид

$$\left\{ \begin{aligned} L_{\text{ДВ}}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) &= -L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j y_i y_j (x_i, x_j) - \sum_{i=1}^N \lambda_i \rightarrow \min_{\lambda_i} \\ 0 &\leq \lambda_i \leq C, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i &= 0. \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Задача (8) представляет собой задачу квадратичной оптимизации относительно λ_i . После того как все величины λ_i будут найдены, по формуле (6) можно найти вектор w . Для поиска параметра w_0 нужно взять любой опорный объект, для которого $0 < \lambda_i < C, 0 < \eta_i < C, \xi_i = 0, M_i = 1$, и из условия $M_i = 1$ выразить w_0 , т.е.

$$y_i((x_i, w) + w_0) = 1; \quad y_i^2((x_i, w) + w_0) = y_i; \quad (x_i, w) + w_0 = y_i.$$

На практике для придания алгоритму вычислительной устойчивости коэффициент w_0 вычисляют как медиану от $y_i - (x_i, w)$

$$w_0 = \text{median}(y_i - (x_i, w)), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Систему (8) преобразуем к векторному виду. Для этого введем

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_N \end{pmatrix}; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_N \end{pmatrix}; e = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}; Q = (y_i y_j (x_i, x_j))_{N \times N}, i, j = 1, 2, \dots, N.$$

Тогда систему (8) можно переписать в виде

$$\begin{cases} L_{\text{дв}}(\lambda) = \frac{1}{2} \lambda^T Q \lambda - e^T \lambda \rightarrow \min_{\lambda}, \\ 0 \leq \lambda_i \leq C, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ y^T \lambda = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Система (10) представляет собою систему, в которой имеется квадратичная функция $L_{\text{дв}}(\lambda)$ и ограничения в виде равенства $y^T \lambda = 0$ и неравенств $0 \leq \lambda_i \leq C, i = 1, 2, \dots, N$. Такую систему удобно решать методом проекции градиента. Напомним основные понятия этого метода.

Проекцией точки $a \in \mathbb{R}^N$ на множество $\Lambda \subset \mathbb{R}^N$ называется точка $\pi_{\Lambda}(a) \in \Lambda$ такая, что $\|\pi_{\Lambda}(a) - a\| \leq \|\lambda - a\|$ при всех $\lambda \in \Lambda$, т.е. точка, ближайшая к a среди всех точек из Λ . Если точка $a \in \Lambda$, то $\pi_{\Lambda}(a) = a$. Если же $a \notin \Lambda$ и Λ открыто, то проекция $\pi_{\Lambda}(a)$ не существует.

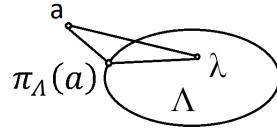


Рис. 3. Проекция точки на множество

Сформулируем несколько теорем.

Теорема 1. Для проекции $\pi_{\Lambda}(a)$ любой точки $a \in \mathbb{R}^N$ на выпуклое замкнутое множество $\Lambda \in \mathbb{R}^N$ выполняются следующие неравенства

$$\begin{aligned} (\pi_{\Lambda}(a) - a, \lambda - \pi_{\Lambda}(a)) &\geq 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda, \\ \|\lambda - \pi_{\Lambda}(a)\|^2 + \|a - \pi_{\Lambda}(a)\|^2 &\leq \|\lambda - a\|^2, \quad \forall \lambda \in \Lambda. \end{aligned}$$

Доказательство. Для всех $\lambda \in \Lambda$ и любого $0 < \theta < 1$ точка $\lambda_{\theta} = \theta \lambda + (1 - \theta) \pi_{\Lambda}(a)$ принадлежит Λ . Будет справедливо неравенство $\|\pi_{\Lambda}(a) - a\| \leq \|\lambda_{\theta} - a\|$. Возводя его в квадрат, получим

$$\begin{aligned} \|\pi_{\Lambda}(a) - a\|^2 &\leq \|\lambda_{\theta} - a\|^2 = \|\theta \lambda + (1 - \theta) \pi_{\Lambda}(a) - a\|^2 = \\ &= \|\pi_{\Lambda}(a) - a + \theta(\lambda - \pi_{\Lambda}(a))\|^2 = \\ &= \|\pi_{\Lambda}(a) - a\|^2 + 2\theta(\pi_{\Lambda}(a) - a, \lambda - \pi_{\Lambda}(a)) + \theta^2 \|\lambda - \pi_{\Lambda}(a)\|^2. \end{aligned}$$

Значит,

$$2\theta(\pi_{\Lambda}(a) - a, \lambda - \pi_{\Lambda}(a)) + \theta^2 \|\lambda - \pi_{\Lambda}(a)\|^2 \geq 0.$$

Сокращая последнее неравенство на θ и выполняя переход при $\theta \rightarrow 0$, получим

$$(\pi_{\Lambda}(a) - a, \lambda - \pi_{\Lambda}(a)) \geq 0.$$

Для доказательства второго неравенства запишем теорему косинусов:
 $\|\lambda - a\|^2 = \|a - \pi_\Lambda(a)\|^2 + \|\lambda - \pi_\Lambda(a)\|^2 - 2(a - \pi_\Lambda(a), \lambda - \pi_\Lambda(a)).$

С учетом того, что $(a - \pi_\Lambda(a), \lambda - \pi_\Lambda(a)) \leq 0$ найдем

$$2(a - \pi_\Lambda(a), \lambda - \pi_\Lambda(a)) = \|a - \pi_\Lambda(a)\|^2 + \|\lambda - \pi_\Lambda(a)\|^2 - \|\lambda - a\|^2 \leq 0,$$

$$\|\lambda - a\|^2 \geq \|a - \pi_\Lambda(a)\|^2 + \|\lambda - \pi_\Lambda(a)\|^2.$$

Теорема 2. Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^N$ – замкнутое выпуклое множество. Функция $L(\lambda): \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ является выпуклой и дифференцируемой с градиентом $\nabla L(\lambda)$, удовлетворяющим условию Липшица с константой $M > 0$. На множестве Λ функция имеет точку минимума $L(\lambda^*) = L^*$. Тогда алгоритм проекционного градиентного спуска с шагом $\alpha = 1/M$

$$a^k = \lambda^k - \frac{1}{M} \nabla L(\lambda^k), \quad \lambda^{k+1} = \pi_\Lambda(a^k), \quad (11)$$

достигает следующей сходимости после итерации $k > 0$:

$$L(\lambda^k) - L^* \leq \frac{M \|\lambda^0 - \lambda^*\|_2^2}{2k}.$$

Доказательство. Из (11) имеем

$$\nabla L(\lambda^k) = M(\lambda^k - a^k).$$

Для выпуклой функции с Липшицевым градиентом справедливо неравенство

$$L(\lambda^{k+1}) \leq L(\lambda^k) + (\nabla L(\lambda^k), \lambda^{k+1} - \lambda^k) + \frac{M}{2} \|\lambda^{k+1} - \lambda^k\|^2 =$$

$$= L(\lambda^k) - M(a^k - \lambda^k, \lambda^{k+1} - \lambda^k) + \frac{M}{2} \|\lambda^{k+1} - \lambda^k\|^2. \quad (12)$$

По теореме косинусов

$$\|a^k - \lambda^k - (\lambda^{k+1} - \lambda^k)\|^2 =$$

$$= \|a^k - \lambda^k\|^2 + \|\lambda^{k+1} - \lambda^k\|^2 - 2(a^k - \lambda^k, \lambda^{k+1} - \lambda^k).$$

Откуда найдем

$$2(a^k - \lambda^k, \lambda^{k+1} - \lambda^k) = \|a^k - \lambda^k\|^2 + \|\lambda^{k+1} - \lambda^k\|^2 - \|a^k - \lambda^{k+1}\|^2. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), получим

$$L(\lambda^{k+1}) \leq L(\lambda^k) - \frac{M}{2} (\|a^k - \lambda^k\|^2 + \|\lambda^{k+1} - \lambda^k\|^2 - \|a^k - \lambda^{k+1}\|^2) +$$

$$+ \frac{M}{2} \|\lambda^{k+1} - \lambda^k\|^2 = L(\lambda^k) - \frac{M}{2} (\|a^k - \lambda^k\|^2 - \|a^k - \lambda^{k+1}\|^2) =$$

$$= L(\lambda^k) - \frac{1}{2M} \|\nabla L(\lambda^k)\|^2 + \frac{M}{2} \|a^k - \lambda^{k+1}\|^2. \quad (14)$$

И снова по теореме косинусов

$$\left\| \lambda^k - \lambda^* - \frac{1}{M} \nabla L(\lambda^k) \right\|^2 = \|\lambda^k - \lambda^*\|^2 +$$

$$+ \left\| \frac{1}{M} \nabla L(\lambda^k) \right\|^2 - 2 \left(\frac{1}{M} \nabla L(\lambda^k), \lambda^k - \lambda^* \right),$$

$$\begin{aligned}
 & 2 \left(\frac{1}{M} \nabla L(\lambda^k), \lambda^k - \lambda^* \right) = \|\lambda^k - \lambda^*\|^2 + \\
 & + \|\lambda^k - a^k\|^2 - \|\lambda^k - \lambda^* - (\lambda^k - a^k)\|^2, \\
 (\nabla L(\lambda^k), \lambda^k - \lambda^*) &= \frac{M}{2} \left(\left\| \frac{1}{M} \nabla L(\lambda^k) \right\|^2 + \|\lambda^k - \lambda^*\|^2 - \|a^k - \lambda^*\|^2 \right). \quad (15)
 \end{aligned}$$

Второе неравенство теоремы 1

$$\begin{aligned}
 & \|\lambda - \pi_\Lambda(a)\|^2 + \|\lambda - \pi_\Lambda(a)\|^2 \leq \|\lambda - a\|^2 \\
 \text{при } \lambda = \lambda^* \text{ и } a = a^k \text{ примет вид} \\
 & \|a^k - \pi_\Lambda(a^k)\|^2 + \|\lambda^* - \pi_\Lambda(a^k)\|^2 \leq \|\lambda^* - a^k\|^2.
 \end{aligned}$$

Из (11) заменим $\pi_\Lambda(a^k) = \lambda^{k+1}$

$$\|\lambda^* - a^k\|^2 \geq \|a^k - \lambda^{k+1}\|^2 + \|\lambda^* - \lambda^{k+1}\|^2. \quad (16)$$

Для выпуклой функции с учетом (15) справедливо

$$\begin{aligned}
 L(\lambda^k) - L^* &\leq (\nabla L(\lambda^k), \lambda^k - \lambda^*) = \\
 &= \frac{M}{2} \left(\left\| \frac{1}{M} \nabla L(\lambda^k) \right\|^2 + \|\lambda^k - \lambda^*\|^2 - \|a^k - \lambda^*\|^2 \right).
 \end{aligned}$$

Используя неравенство (16) получим оценку

$$\begin{aligned}
 L(\lambda^k) - L^* &\leq \frac{M}{2} \left(\left\| \frac{1}{M} \nabla L(\lambda^k) \right\|^2 + \|\lambda^k - \lambda^*\|^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \|a^k - \lambda^{k+1}\|^2 - \|\lambda^* - \lambda^{k+1}\|^2 \right).
 \end{aligned}$$

Просуммируем это неравенство от 0 до $k-1$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{k-1} (L(\lambda^i) - L^*) &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2M} \|\nabla L(\lambda^i)\|^2 + \frac{M}{2} \|\lambda_0 - \lambda^*\|^2 - \\
 &\quad - \frac{M}{2} \|\lambda^* - \lambda^k\|^2 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{M}{2} \|a^i - \lambda^{i+1}\|^2 \leq \\
 &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2M} \|\nabla f(\lambda^i)\|^2 + \frac{M}{2} \|\lambda_0 - \lambda^*\|^2 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{M}{2} \|a^i - \lambda^{i+1}\|^2
 \end{aligned}$$

Используя свойство выпуклой функции (14) в виде

$$\frac{1}{2M} \|\nabla L(\lambda^k)\|^2 \leq L(\lambda^k) - L(\lambda^{k+1}) + \frac{M}{2} \|a^k - \lambda^{k+1}\|^2,$$

получим

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{k-1} (L(\lambda^i) - L^*) &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \left(L(\lambda^i) - L(\lambda^{i+1}) + \frac{M}{2} \|a^i - \lambda^{i+1}\|^2 \right) + \\
 + \frac{M}{2} \|\lambda^0 - \lambda^*\|^2 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{M}{2} \|a^i - \lambda^{i+1}\|^2 &= L(\lambda^0) - L(\lambda^k) + \frac{M}{2} \|\lambda^0 - \lambda^*\|^2.
 \end{aligned}$$

Преобразуем суммы

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} (L(\lambda^i) - L^*) &= L(\lambda^0) + \sum_{i=1}^k L(\lambda^i) - L(\lambda^k) - \sum_{i=1}^k L^* \leq \\ &\leq L(\lambda^0) - L(\lambda^k) + \frac{M}{2} \|\lambda^0 - \lambda^*\|^2. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\sum_{i=1}^k (L(\lambda^i) - L^*) \leq \frac{M}{2} \|\lambda^0 - \lambda^*\|^2.$$

Воспользуемся тем, что $\lambda^{k+1} = \pi_X(a^k)$ – проекция a^k на множество Λ . По определению проекции

$$\|a^k - \lambda^{k+1}\| \leq \|a^k - \lambda^k\|, \quad \lambda^k \in \Lambda.$$

Возведем это неравенство в квадрат, умножим на $M/2$ и воспользуемся равенством $\|\nabla L(\lambda^k)\| = M\|a^k - \lambda^k\|$:

$$\frac{M}{2} \|a^k - \lambda^{k+1}\|^2 \leq \frac{M}{2} \|a^k - \lambda^k\|^2 = \frac{1}{2M} \|\nabla L(\lambda^k)\|^2.$$

Вернемся к неравенству (14)

$$L(\lambda^{k+1}) \leq L(\lambda^k) - \frac{1}{2M} \|\nabla L(\lambda^k)\|^2 + \frac{M}{2} \|a^k - \lambda^{k+1}\|^2.$$

$$L(\lambda^{k+1}) \leq L(\lambda^k) - \frac{1}{2M} \|\nabla L(\lambda^k)\|^2 + \frac{1}{2M} \|\nabla L(\lambda^k)\|^2 = L(\lambda^k).$$

Следовательно, последовательность $\{L(\lambda^k)\}$ монотонно убывает при возрастающем k . Для монотонно убывающей функции справедливо

$$k(L(\lambda^k) - L^*) \leq \sum_{i=1}^k (L(\lambda^i) - L^*) \leq \frac{M}{2} \|\lambda^0 - \lambda^*\|^2.$$

Следовательно,

$$L(\lambda^k) - L^* \leq \frac{M}{2k} \|\lambda^0 - \lambda^*\|^2.$$

Теорема доказана.

Несмотря на то что теорема 2 доказана только при условии $\alpha = 1/M$, проекционный метод

$$a^k = \lambda^k - \alpha \nabla L(\lambda^k), \quad \lambda^{k+1} = \pi_\Lambda(a^k), \quad (17)$$

сходится и при $\alpha \leq 1/M$.

Вычислим градиент для задачи (10)

$$dL_{\text{дв}}(\lambda) = \frac{1}{2} (d\lambda, Q\lambda) + \frac{1}{2} (\lambda, Qd\lambda) - (e, d\lambda) = \left(\frac{1}{2} (Q + Q^T)\lambda - e, d\lambda \right),$$

$$\nabla L_{\text{дв}}(\lambda) = \frac{1}{2} (Q + Q^T)\lambda - e.$$

В задаче (10) имеются два ограничения. Первое из ограничений – это неравенство $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^N \mid 0 \leq \lambda_i \leq C, \quad i = 1, 2, \dots, N\}$. В многомерном

пространстве \mathbb{R}^N это неравенство задает координатный параллелепипед. Проекция точки a на множество L в этом случае может быть вычислена по формуле

$$\pi_L(a) = \begin{cases} 0, & \text{если } a_i < 0, \\ a_i, & \text{если } 0 \leq a_i \leq C, \\ C, & \text{если } a_i > C. \end{cases} \quad (18)$$

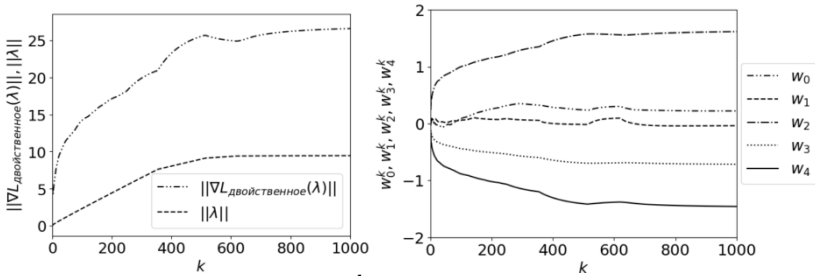


Рис. 4. Зависимости параметров $w_i^k, i = 0, 1, \dots, 4$, нормы $\|\lambda\|$ и нормы градиента $\|\nabla L_{\text{двойственное}}(\lambda)\|$ от номера итерации k при $\|\lambda^0\| = 0, C = 5, \alpha = 0.01$

Второе ограничение системы (10) – это уравнение $y^T \lambda = (y, \lambda) = 0$. Оно задает гиперплоскость в \mathbb{R}^N с нормальным вектором, равным y . Таким образом, чтобы найти проекцию точки a на гиперплоскость L , нужно точку a подвергнуть движению вдоль вектора $-y$: $\pi_L(a) = a - \beta y$.

Если проекция $\pi_L(a)$ будет принадлежать L , то

$$y^T \pi_L(a) = 0, \quad y^T (a - \beta y) = 0, \quad y^T a - \beta y^T y = 0, \quad \beta = \frac{y^T a}{y^T y}.$$

Сама же проекция будет равна

$$\pi_L(a) = a - \frac{y^T a}{y^T y} y = a - \frac{(y, a)}{(y, y)} y. \quad (19)$$

При численных расчетах по методу проекции градиента на основе выражений (17)-(19) была использована та же функция `make_classification` из пакета `scikit-learn`, что и для субградиентного метода. Результаты расчетов представлены на рис. 4.

Сравнение результатов численных расчетов. Для сравнения точности субградиентного метода и метода проекции градиента введем величины $\Delta w_0 = w_{0,sub} - w_{0,proj}$, $\Delta w = w_{sub} - w_{proj}$. Графики зависимостей этих величин Δw_0^k и $\|\Delta w^k\|$ от номера итерации представлены на рис. 5. Анализируя эти графики, а также расчеты при других значениях начальных параметров, можно сделать вывод о том, что субградиентный метод и метод проекции градиента дают схожую точность.

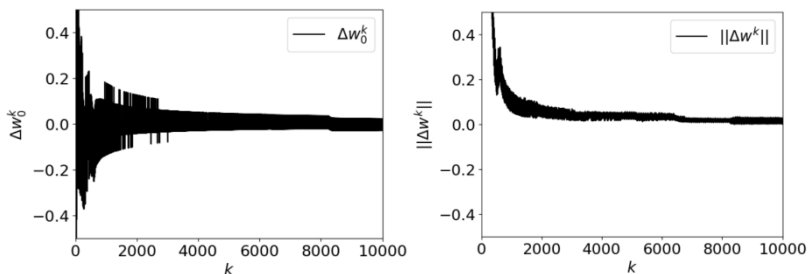


Рис. 5. Зависимости абсолютной разности Δw_0^k , нормы абсолютной разности $\|\Delta w^k\|$ от номера итерации k при тех же значениях, что на рис. 2 и 4

После того как на основе какого-либо алгоритма определены параметры w_0 и w , проведем классификацию объектов, т.е. разделим их на два класса. Для этого для каждого объекта вычислим величину $(x_i, w) + w_0$. Классификацию будем проводить по следующему правилу:

$$\begin{cases} \text{если } (x_i, w) + w_0 < 0, \text{ то класс } -1; \\ \text{если } (x_i, w) + w_0 \geq 0, \text{ то класс } +1. \end{cases}$$

Оба метода дают одинаковую классификацию, что можно видеть из матрицы ошибок на рис. 6. Также отметим, что оба метода приводят к однозначному делению всех объектов на неинформативные, опорные граничные и опорные нарушители.

Предсказанные			
классы			
$\begin{pmatrix} -1 & +1 \\ 23 & 2 & -1 \\ 0 & 25 & +1 \end{pmatrix}$	Истинные классы		
Рис. 6. Матрица ошибок			

Заключение. Сравнивая два подхода к реализации метода опорных векторов, следует отметить, что несмотря на одинаковую их точность, метод проекции градиента, сходится немного быстрее и более эффективно позволяет контролировать точность расчетов. Также подход, связанный с построением двойственной функции Лагранжа, совместно с методом проекции градиента позволяет проводить не только линейную классификацию, а и классификацию на основе ядерных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Naum Z. Shor.* Minimization Methods for Non-differentiable Functions. Springer-Verlag, 1985.
2. *Сухарев А.Г.* Курс методов оптимизации: Учеб. пособие / А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров. 2-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 368 с.
3. *Измайлов А.Ф.* Численные методы оптимизации: Учеб. пособие / А.Ф. Измайлов, М.В. Солодов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 304 с.

УДК 519.6

А. Н. Жаров, И. Г. Минеичева

Ярославский государственный технический университет
Россия, Ярославль, e-mail: zharovan@yustu.ru, mineichevaig@yustu.ru

О РЕАЛИЗАЦИИ L_1 РЕГУЛЯРИЗАЦИИ С ПОМОЩЬЮ СУБГРАДИЕНТНОГО И ПРОКСИМАЛЬНОГО МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ

Проводится сравнение точности и сходимости субградиентного и проксимального градиентного методов при реализации L_1 регуляризации в задаче линейной регрессии. Даются верхние оценки сходимости методов. Показано, что оба метода дают приемлемую точность при решении задач L_1 регуляризации. Однако проксимальный градиентный метод сходится, как правило, быстрее и дает более разреженные решения, содержащие точные нулевые значения коэффициентов регрессии.

Ключевые слова: машинное обучение, L_1 регуляризация, субградиентный метод, проксимальный градиентный метод

A. N. Zharov, I. G. Mineicheva

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: zharovan@yustu.ru, zharovaig@yustu.ru

ON THE IMPLEMENTATION OF L_1 REGULARIZATION USING SUBGRADIENT AND PROXIMAL OPTIMIZATION METHODS

The accuracy and convergence of the subgradient and proximal gradient methods for implementing L_1 regularization in a linear regression problem are compared. Upper bounds for the convergence of the methods are provided. It is shown that both methods provide acceptable accuracy when solving L_1 regularization problems. However, the proximal gradient method generally converges faster and produces sparser solutions containing exact zero values of the regression coefficients.

Keywords: machine learning, L_1 regularization, subgradient method, proximal gradient method

Субградиентные и проксимальные градиентные методы оптимизации неоднократно являлись предметом исследования [1, 2]. Целью же настоящего исследования является сравнение точности и сходимости этих методов применительно к задаче L_1 регуляризации.

Постановка задачи.

Рассмотрим стандартную задачу машинного обучения по минимизации параметрической функции $L(w_0, w_1, \dots, w_m)$, характеризующей ошибку обучения модели. Функция L называется функцией ошибок (Loss-функцией), величины w_0, w_1, \dots, w_m - параметры модели.

Примем, что данную функцию можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$L(w) = f(w) + r(w), \tag{1}$$

$$w = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \dots \\ w_m \end{pmatrix}, \quad r(w) = \mu(\|w\|_1 - |w_0|) = \mu(|w_1| + |w_2| + \dots + |w_m|),$$

где $\|w\|_1 - L_1$ -норма; μ - параметр регуляризации. Функцию $f(w)$ будем считать гладкой, а функцию $r(w)$ - выпуклой.

Напомним понятие субградиента. Если $L(w)$ – функция, определенная на множестве $W \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$, тогда вектор $g(w) \in \mathbb{R}^{m+1}$ называется субградиентом функции $L(w)$ в точке $w \in W$, если

$$L(y) - L(w) \geq (g(w), y - w), \quad \forall y \in W.$$

Множество всех субградиентов функции называется ее субдифференциалом:

$$\partial L(w) = \{g(w) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid L(y) - L(w) \geq (g(w), y - w), \quad \forall y \in W\}.$$

Если функция дифференцируема в точке, то ее субградиент совпадает с градиентом функции в этой точке. Например, для функции $r(w) = |w|$, $w \in \mathbb{R}$ субдифференциал

$$\partial r(w) = \begin{cases} -1, & w < 0; \\ [-1; +1], & w = 0; \\ +1, & w > 0. \end{cases}$$

Субградиентный метод оптимизации.

Субградиентный метод оптимизации функции ошибок $L(w)$ основан на итерационном процессе вида:

$$w^{k+1} = w^k - \alpha_k g(w^k), \quad g(w^k) \in \partial L(w^k). \tag{2}$$

Обозначим оптимальную точку w^* . Найдем Евклидову норму разности

$$\begin{aligned} \|w^{k+1} - w^*\|_2^2 &= \|w^k - w^* - \alpha_k g(w^k)\|_2^2 = \\ &= (w^k - w^* - \alpha_k g(w^k), w^k - w^* - \alpha_k g(w^k)) = \\ &= \|w^k - w^*\|_2^2 - 2\alpha_k (g(w^k), w^k - w^*) + \alpha_k^2 \|g(w^k)\|_2^2 = \\ &= \|w^k - w^*\|_2^2 + 2\alpha_k (g(w^k), w^* - w^k) + \alpha_k^2 \|g(w^k)\|_2^2, \end{aligned}$$

здесь $(,)$ - означают скалярное произведение.

Используя определение субградиента в виде

$$L(w^*) - L(w^k) \geq (g(w^k), w^* - w^k),$$

найдем

$$\begin{aligned} \|w^{k+1} - w^*\|_2^2 &= \|w^k - w^*\|_2^2 + 2\alpha_k (g(w^k), w^* - w^k) + \alpha_k^2 \|g(w^k)\|_2^2 \leq \\ &\leq \|w^k - w^*\|_2^2 - 2\alpha_k (L(w^k) - L(w^*)) + \alpha_k^2 \|g(w^k)\|_2^2. \end{aligned}$$

Суммируя последние неравенства, получим

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{k_{max}} 2\alpha_k (L(w^k) - L(w^*)) \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{k_{max}} (\|w^k - w^*\|_2^2 - \|w^{k+1} - w^*\|_2^2) + \sum_{k=0}^{k_{max}} \alpha_k^2 \|g(w^k)\|_2^2. \end{aligned}$$

Введем понятие лучшего значения функции на протяжении всего итерационного процесса

$$L_{\text{наилучшее}} = \min_{0 \leq k \leq k_{max}} L(w^k).$$

Также будем считать, что Евклидова норма субградиента ограничена некоторой константой

$$\|g(w^k)\|_2 \leq G, \quad G \in \mathbb{R}.$$

Отбрасывая слагаемое $\|w^{k_{max}+1} - w^*\|_2^2$, получим оценку

$$L_{\text{наилучшее}} - L(w^*) \leq \frac{\|w^0 - w^*\|_2^2}{2 \sum_{k=0}^{k_{max}} \alpha_k} + \frac{G^2 \sum_{k=0}^{k_{max}} \alpha_k^2}{2 \sum_{k=0}^{k_{max}} \alpha_k}.$$

Таким образом, для сходимости субградиентного метода к лучшему значению функции достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\lim_{k_{max} \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k_{max}} \alpha_k = \infty, \quad \lim_{k_{max} \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{k_{max}} \alpha_k^2}{\sum_{k=0}^{k_{max}} \alpha_k} = 0.$$

Эти условия будут удовлетворяться, если выбрать

$$\alpha_k = \frac{C}{k^p}, \quad 0 < p \leq 1, \quad C > 0. \quad (3)$$

Таким образом, субградиентный метод оптимизации основан на итерационном процессе (2) с выбором шага по выражению (3).

Проксимальный градиентный метод оптимизации. Для функции ошибок $L(w) = f(w) + r(w)$ проксимальный оператор определим выражением

$$\text{prox}_r(w^k) = \arg \min_{w \in \mathbb{R}^{m+1}} \left(r(w) + \frac{1}{2} \|w - w^k\|_2^2 \right).$$

Сформулируем некоторые теоремы о проксимальном операторе.

Теорема 1. Пусть $r : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ - выпуклая функция, для которой определен проксимальный оператор. Если существует такое

$\widehat{w} \in \mathbb{R}^{m+1}$, что $r(w) < +\infty$, то проксимальный оператор определен однозначно.

Доказательство. Проксимальный оператор возвращает минимум некоторой задачи оптимизации. Функция $r(w) + \frac{1}{2}\|w - w^k\|_2^2$ сильно выпуклая, то есть имеет ровно один единственный минимум.

Теорема 2. Пусть $r : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ - выпуклая функция, для которой определена функция prox_r . Тогда для любых $x, y \in \mathbb{R}^{m+1}$ следующие три условия эквивалентны:

$$\begin{aligned} \text{prox}_r(x) &= y, \\ x - y &\in \partial r(y), \\ (x - y, z - y) &\leq r(z) - r(y) \text{ для любого } z \in \mathbb{R}^{m+1}. \end{aligned}$$

Доказательство. Установим эквивалентность первого и второго условий. Первое условие можно записать так:

$$y = \text{prox}_r(x) = \underset{\widehat{w} \in \mathbb{R}^{m+1}}{\text{argmin}} \left(r(\widehat{w}) + \frac{1}{2} \|\widehat{w} - x\|_2^2 \right).$$

Это условие оптимальности можно переписать в виде:

$$0 = \partial \left(r(\widehat{w}) + \frac{1}{2} \|\widehat{w} - x\|_2^2 \right) \Big|_{\widehat{w}=y} = \partial r(y) + y - x; \quad \rightarrow \quad x - y \in \partial r(y).$$

Для третьего условия. Из определения субдифференциала следует, что для любого субградиента $g \in \partial r(y)$ и для любого $z \in \mathbb{R}^{m+1}$: $(g, z - y) \leq r(z) - r(y)$. В частности, это справедливо для $g = x - y$. И наоборот, также очевидно: для $g = x - y$ выполняется вышеуказанное соотношение, что означает $z \in \partial r(y)$.

Теорема 3. Оператор $\text{prox}_r(x)$ является строго нерасширяющим:

$$\|\text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y)\|_2^2 \leq (\text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y), x - y),$$

и нерасширяющим:

$$\|\text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y)\|_2 \leq \|x - y\|_2.$$

Доказательство. Пусть $u = \text{prox}_r(x)$ и $v = \text{prox}_r(y)$, тогда можем записать:

$$(x - u, z_1 - u) \leq r(z_1) - r(u), \quad (y - v, z_2 - v) \leq r(z_2) - r(v).$$

Заменим $z_1 = v$ и $z_2 = u$ и сложим эти неравенства

$$(x - y, v - u) + \|v - u\|_2^2 \leq 0.$$

Значит,

$$\|v - u\|_2^2 \leq (x - y, v - u),$$

$$\|\text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y)\|_2^2 \leq (x - y, \text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y)).$$

Используя неравенство Коши-Буняковского-Шварца, получим

$$\begin{aligned} \|\text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y)\|_2^2 &\leq (x - y, \text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y)) \leq \\ &\leq \|x - y\| \|\text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y)\|. \end{aligned}$$

Сокращая на $\|\text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y)\|$ найдем

$$\|\text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y)\| \leq \|x - y\|.$$

Теорема 4. Пусть $f: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ и $r: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклые функции. Дополнительно предположим, что f является непрерывно дифференцируемой и гладкой функцией, а для r определена функция prox_r . Тогда w^* является решением составной задачи оптимизации тогда и только тогда, когда для любого $\alpha > 0$ выполняется следующее условие:

$$w^* = \text{prox}_{\alpha r}(w^* - \alpha \nabla f(w^*)).$$

Доказательство. Условия оптимальности запишем в виде

$$0 \in \nabla f(w^*) + \partial r(w^*),$$

$$-\alpha \nabla f(w^*) \in \alpha \partial r(w^*),$$

$$w^* - \alpha \nabla f(w^*) - w^* \in \alpha \partial r(w^*).$$

Используя теорему 2, получим $w^* = \text{prox}_{\alpha r}(w^* - \alpha \nabla f(w^*))$.

Теорема 5. Предположим, что f является выпуклой, дифференцируемой на \mathbb{R}^{m+1} , $\alpha \nabla f$ удовлетворяет условию Липшица с константой $M > 0$; r является выпуклой, и

$$\text{prox}_{\alpha r}(w^k) = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{argmin}} \left(\alpha r(w) + \frac{1}{2} \|w - w^k\|_2^2 \right), \quad (4)$$

может быть вычислен.

Тогда метод проксимального градиента

$$w^{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}(w^k - \alpha \nabla f(w^k)) \quad (5)$$

с фиксированным размером шага $\alpha = 1/M$ удовлетворяет условию

$$L(w^k) - L(w^*) \leq \frac{M}{2k} \|w^0 - w^*\|_2^2.$$

Доказательство.

$$w^{k+1} = w^k - w^k + \text{prox}_{\alpha r}(w^k - \alpha \nabla f(w^k)),$$

$$w^{k+1} = w^k - \frac{\alpha}{\alpha} (w^k - \text{prox}_{\alpha r}(w^k - \alpha \nabla f(w^k))),$$

$$w^{k+1} = w^k - \alpha G(w^k), \quad G(w^k) = \frac{1}{\alpha} (w^k - \text{prox}_{\alpha r}(w^k - \alpha \nabla f(w^k))).$$

Заметим, что если $w^k = w^*$, то $G(w^*) = 0$.

Для выпуклой, дифференцируемой функции $f(w)$ с Липшицевым градиентом справедливо неравенство

$$f(w^{k+1}) \leq f(w^k) + (\nabla f(w^k), w^{k+1} - w^k) + \frac{M}{2} \|w^{k+1} - w^k\|_2^2.$$

Так как функция $f(w)$ выпукла, то

$$f(w) \geq f(w^k) + (\nabla f(w^k), w - w^k),$$

$$f(w^k) \leq f(w) - (\nabla f(w^k), w - w^k).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f(w^{k+1}) &\leq f(w) - (\nabla f(w^k), w - w^k) + \\ &+ (\nabla f(w^k), w^{k+1} - w^k) + \frac{M}{2} \|w^{k+1} - w^k\|_2^2. \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что $w^{k+1} - w^k = -\alpha G(w^k)$, найдем

$$f(w^{k+1}) \leq f(w) + (\nabla f(w^k), w^{k+1} - w) + \frac{\alpha^2 M}{2} \|G(w^k)\|_2^2.$$

Воспользуемся теоремой 2:

$w^{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}(w^k - \alpha \nabla f(w^k)) \leftrightarrow w^k - \alpha \nabla f(w^k) - w^{k+1} \in \partial \alpha r(w^{k+1})$,
а поскольку $w^k - w^{k+1} = \alpha G(w^k)$, то

$$\begin{aligned} \alpha G(w^k) - \alpha \nabla f(w^k) &\in \partial \alpha r(w^{k+1}), \\ G(w^k) - \nabla f(w^k) &\in \partial r(w^{k+1}). \end{aligned}$$

Если g является субградиентом выпуклой функции r , то для любой точки справедливо

$$\begin{aligned} r(w) &\geq r(w^{k+1}) + (g, w - w^{k+1}), \quad g \in \partial r(w^{k+1}), \\ r(w) &\geq r(w^{k+1}) + (G(w^k) - \nabla f(w^k), w - w^{k+1}), \\ (\nabla f(w^k), w^{k+1} - w) &\leq r(w) - r(w^{k+1}) - (G(w^k), w - w^{k+1}). \end{aligned}$$

Учитывая приведенную выше оценку, запишем:

$$\begin{aligned} f(w^{k+1}) &\leq f(w) + (\nabla f(w^k), w^{k+1} - w) + \frac{\alpha^2 M}{2} \|G(w^k)\|_2^2, \\ f(w^{k+1}) &\leq f(w) + r(w) - r(w^{k+1}) - \\ &\quad - (G(w^k), w - w^{k+1}) + \frac{\alpha^2 M}{2} \|G(w^k)\|_2^2, \\ f(w^{k+1}) + r(w^{k+1}) &\leq f(w) + r(w) - \\ &\quad - (G(w^k), w - w^{k+1}) + \frac{\alpha^2 M}{2} \|G(w^k)\|_2^2. \end{aligned}$$

Поскольку $L(w) = f(w) + r(w)$, то

$$L(w^{k+1}) \leq L(w) - (G(w^k), w - w^{k+1}) - (G(w^k), \alpha G(w^k)) + \frac{\alpha^2 M}{2} \|G(w^k)\|_2^2,$$

$$L(w^{k+1}) \leq L(w) + (G(w^k), w^k - w) - \alpha (G(w^k), G(w^k)) + \frac{\alpha^2 M}{2} \|G(w^k)\|_2^2,$$

$$L(w^{k+1}) \leq L(w) + (G(w^k), w^k - w) - \alpha \|G(w^k)\|_2^2 + \frac{\alpha^2 M}{2} \|G(w^k)\|_2^2,$$

$$L(w^{k+1}) \leq L(w) + (G(w^k), w^k - w) + \frac{\alpha}{2} (\alpha M - 2) \|G(w^k)\|_2^2.$$

Поскольку $\alpha = \frac{1}{M}$, то

$$L(w^{k+1}) \leq L(w) + (G(w^k), w^k - w) - \frac{\alpha}{2} \|G(w^k)\|_2^2.$$

Подставляя в последнее выражение $w = w^k$, найдем

$$L(w^{k+1}) \leq L(w^k) - \frac{\alpha}{2} \|G(w^k)\|_2^2.$$

Видим, что алгоритм проксимального градиента приводит к монотонному убыванию функции ошибок $L(w)$.

При $w = w^*$ предпоследнее неравенство запишется в виде

$$L(w^{k+1}) \leq L(w^*) + (G(w^k), w^k - w^*) - \frac{\alpha}{2} \|G(w^k)\|_2^2.$$

Преобразуем это неравенство:

$$\begin{aligned} L(w^{k+1}) - L(w^*) &\leq \frac{1}{2\alpha} (2\alpha G(w^k), w^k - w^*) - \| \alpha G(w^k) \|_2^2, \\ &L(w^{k+1}) - L(w^*) \leq \\ &\leq \frac{1}{2\alpha} (2\alpha G(w^k), w^k - w^*) - \| \alpha G(w^k) \|_2^2 - \|w^k - w^*\|_2^2 + \|w^k - w^*\|_2^2, \\ L(w^{k+1}) - L(w^*) &\leq \frac{1}{2\alpha} (-\|w^k - w^* - \alpha G(w^k)\|_2^2 + \|w^k - w^*\|_2^2). \end{aligned}$$

Поскольку $\alpha G(w^k) = w^k - w^{k+1}$, то

$$L(w^{k+1}) - L(w^*) \leq \frac{1}{2\alpha} (-\|w^{k+1} - w^*\|_2^2 + \|w^k - w^*\|_2^2).$$

Просуммируем это неравенство по итерациям $0 \leq i \leq k-1$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} (L(w^{i+1}) - L(w^*)) &\leq \frac{1}{2\alpha} \sum_{i=0}^{k-1} (-\|w^{i+1} - w^*\|_2^2 + \|w^i - w^*\|_2^2) = \\ &= \frac{1}{2\alpha} (\|w^0 - w^*\|_2^2 - \|w^k - w^*\|_2^2). \end{aligned}$$

Последовательность $L(w^k)$ – убывающая, следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} L(w^{i+1}) &= L(w^1) + L(w^2) + \dots + L(w^k) \geq kL(w^k), \\ L(w^k) &\leq \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} L(w^{i+1}), \quad L(w^k) - L(w^*) \leq \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} (L(w^{i+1}) - L(w^*)), \\ L(w^k) - L(w^*) &\leq \frac{1}{2\alpha k} (\|w^0 - w^*\|_2^2 - \|w^k - w^*\|_2^2). \end{aligned}$$

Отбрасывая слагаемое $\|w^k - w^*\|_2^2$, получим оценку

$$L(w^k) - L(w^*) \leq \frac{\|w^0 - w^*\|_2^2}{2\alpha k}.$$

Принимая $\alpha = \frac{1}{M}$, окончательно имеем

$$L(w^k) - L(w^*) \leq \frac{M \|w^0 - w^*\|_2^2}{2k}.$$

Теорема 5 доказана.

Найдем явный вид проксимального оператора для случая L_1 регуляризации. Для этого рассмотрим проксимальный оператор вида

$$\text{prox}_{\mu|w|}(a) = \underset{w \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \left(\mu|w| + \frac{1}{2} (w - a)^2 \right),$$

где $\mu, a \in \mathbb{R}, \mu \geq 0$. Введем функцию

$$\varphi(w) = \mu|w| + \frac{1}{2}(w - a)^2.$$

Производная этой функции равна

$$\varphi'(w) = \begin{cases} -\mu + w - a, & w < 0, \\ \text{не существует} & w = 0, \\ \mu + w - a, & w > 0. \end{cases}$$

Имеем следующие критические точки

$$\begin{cases} w = a + \mu, & a < -\mu, \\ w = 0, \\ w = a - \mu, & a > \mu. \end{cases}$$

Значение функции в этих точках

$$\varphi(a + \mu) = \mu|a + \mu| + \frac{1}{2}(a + \mu - a)^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{(a + \mu)^2}{2}, \quad a < -\mu,$$

$$\varphi(0) = \mu|0| + \frac{1}{2}(0 - a)^2 = \frac{a^2}{2},$$

$$\varphi(a - \mu) = \mu|a - \mu| + \frac{1}{2}(a - \mu - a)^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{(a - \mu)^2}{2}, \quad a > \mu.$$

Если $a < -\mu$, то $\varphi(a + \mu) < \varphi(0)$. Значит, наименьшее значение $\varphi(w)$ будет достигать в точке $w = a + \mu$, и

$$\text{prox}_{\mu|w|}(a) = a + \mu, \quad a < -\mu.$$

Если $-\mu \leq a \leq \mu$, то у функции $\varphi(w)$ существует только один минимум в точке $w = 0$ и

$$\text{prox}_{\mu|w|}(a) = 0, \quad -\mu \leq a \leq \mu.$$

Если $a > \mu$, то $\varphi(a - \mu) < \varphi(0)$. Значит, наименьшее значение $\varphi(w)$, будет достигать в точке $w = a - \mu$, и

$$\text{prox}_{\mu|w|}(a) = a - \mu, \quad a > \mu.$$

Следовательно, проксимальный оператор будет иметь вид

$$\text{prox}_{\mu|w|}(a) = \begin{cases} a + \mu, & a < -\mu, \\ 0, & -\mu \leq a \leq \mu, \\ a - \mu, & a > \mu. \end{cases}$$

Последнее выражение можно переписать в виде

$$\text{prox}_{\mu|w|}(a) = [|a| - \mu]_+ \text{sign}(a)$$

или

$$\text{prox}_{\alpha\mu|w|}(a) = [|a| - \alpha\mu]_+ \text{sign}(a), \quad (6)$$

где $[|a| - \alpha\mu]_+ = \max\{0, |a| - \alpha\mu\}$ – означает положительную срезку функции.

Заметим также, что проксимальный оператор при условии $r = 0$

$$\text{prox}_0(a) = \underset{w \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \left(0 + \frac{1}{2} (w - a)^2 \right) = a. \quad (7)$$

Поскольку в выражении (1) регуляризационное слагаемое не содержит нулевую компоненту вектора w_0 , то при реализации формулы (5) с проксимальным оператором (4) для компоненты w_0 вектора w нужно использовать формулу (7). Для компонент w_1, w_2, \dots, w_{m+1} вектора w используем формулу (6) для проксимального оператора. Следовательно, имеем следующий вычислительный алгоритм:

$$\begin{aligned} w_0^{k+1} &= \text{prox}_0(w^k - \alpha \nabla f(w^k)) = w_0^k - \alpha \frac{\partial f}{\partial w_0}(w^k), \\ w_i^{k+1} &= \text{prox}_{\alpha r}(w^k - \alpha \nabla f(w^k)) = \\ &= \left[\left| w_i^k - \alpha \frac{\partial f}{\partial w_i}(w^k) \right| - \alpha\mu \right]_+ \operatorname{sign} \left(w_i^k - \alpha \frac{\partial f}{\partial w_i}(w^k) \right), \\ & \quad i = 1, 2, \dots, m + 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Сравнение субградиентного и проксимального градиентного методов оптимизации.

В случае линейной регрессии с L_1 регуляризацией функция ошибок имеет вид

$$L(w) = f(w) + r(w) = \frac{1}{2N} \|Xw - y\|_2^2 + \mu(|w_1| + |w_2| + \dots + |w_m|),$$

где N – число точек (объем датасета),

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N1} & x_{N2} & \dots & x_{Nm} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_m \end{pmatrix}.$$

Напомним понятие матричной производной: если первый дифференциал функции $dL(w)$ можно представить в виде скалярного произведения какой-то величины a на малое приращение аргумента Δw , т.е. в виде $(a, \Delta w)$, то производная функции $L(w)$ по аргументу w равна a :

$$\left. \frac{\partial L}{\partial w} \right|_{w=w_0} = a.$$

В нашем случае эта производная будет градиентом $\nabla L(w_0)$.

Вычислим субградиент ∇L . Для этого запишем субдифференциал функции ошибок

$$\begin{aligned}
 dL &= \frac{1}{2N} d(Xw - y, Xw - y) + \mu d(|w_1| + |w_2| + \dots + |w_m|) = \\
 &= \frac{1}{2N} (Xdw, Xw - y) + \frac{1}{2N} (Xw - y, Xdw) + \\
 &\quad + \mu(0dw_0 + b_1(w_1)dw_1 + b_2(w_2)dw_2 + \dots + b_m(w_m)dw_m) = \\
 &= \frac{2}{2N} (Xw - y, Xdw) + \mu(0, b_1(w_1), b_2(w_2), \dots, b_m(w_m)) \begin{pmatrix} dw_0 \\ dw_1 \\ dw_2 \\ \dots \\ dw_m \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{N} (X^T(Xw - y), dw) + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ b_1(w_1) \\ b_2(w_2) \\ \dots \\ b_m(w_m) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} dw_0 \\ dw_1 \\ dw_2 \\ \dots \\ dw_m \end{pmatrix} = \\
 &= \left(\frac{1}{N} X^T(Xw - y) + \mu B(w), dw \right),
 \end{aligned}$$

где

$$B(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1(w_1) \\ b_2(w_2) \\ \dots \\ b_m(w_m) \end{pmatrix}, \quad b_i(w_i) = \begin{cases} -1, & \text{если } w_i < 0, \\ [-1; +1], & \text{если } w_i = 0, \\ +1, & \text{если } w_i > 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Следовательно, субградиент функции ошибок равен

$$\nabla L(w) = \nabla f(w) + \nabla r(w) = \frac{1}{N} X^T(Xw - y) + \mu B(w).$$

Подставляя вычисленный субградиент в формулу (2) получим итерационную формулу для субградиентного метода:

$$w^{k+1} = w^k - \alpha_k \left(\frac{1}{N} X^T(Xw^k - y) + \mu B(w^k) \right). \quad (9)$$

При реализации проксимального градиентного метода частные производные от функции $f(w)$, входящие в выражения (8) будем вычислять как проекции градиента на оси координат многомерного Евклидова пространства:

$$\frac{\partial f}{\partial w_i}(w^k) = \text{пр}_i \left(\frac{1}{N} X^T(Xw^k - y) \right), \quad i = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Сравнение сходимости и точности субградиентного и проксимального градиентного методов было проведено с использованием языка Python. Данные для расчетов были сформированы функцией `make_regression(n_samples=N, n_features=m, noise=5, random_state=42)` из библиотеки `scikit-learn`.

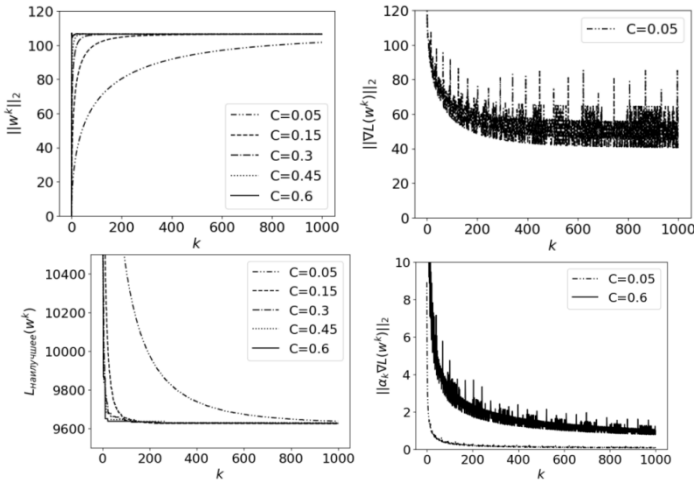


Рис. 1. Зависимости нормы $\|w^k\|_2$, нормы субградиента функции потерь $\|\nabla L(w^k)\|_2$, нормы $\|\alpha_k \nabla L(w^k)\|_2$, наилучшего значения функции потерь $L_{\text{наилучшее}}(w^k)$ от номера итерации k построенные по формуле (9) при $N = 200$, $m = 10$, $\mu = 30$, $p = 0.5$, $w^0 = (0, 0, \dots, 0)$ и различных значений параметра C

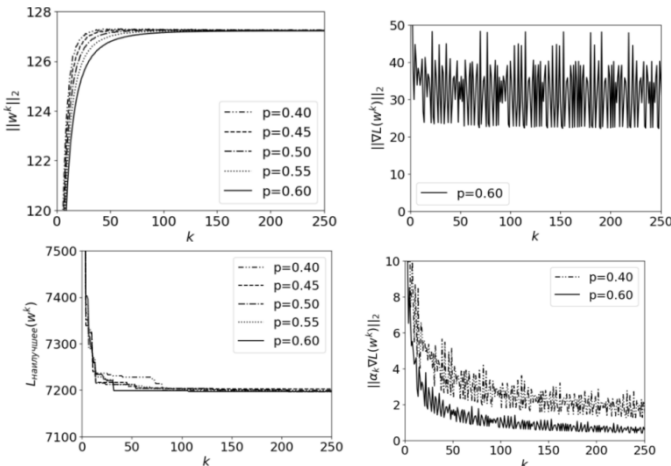


Рис. 2. Зависимости нормы $\|w^k\|_2$, нормы субградиента функции потерь $\|\nabla L(w^k)\|_2$, нормы $\|\alpha_k \nabla L(w^k)\|_2$, наилучшего значения функции потерь $L_{\text{наилучшее}}(w^k)$ от номера итерации k построенные по формуле (9) при $N = 200$, $m = 10$, $\mu = 20$, $C = 0.5$, $w^0 = (0, 0, \dots, 0)$ и различных значений параметра p

При численных расчетах субградиентным методом по формуле (9) с выбором параметров по условию (3) выяснилось, что сходимость данного метода чувствительна к выбору параметров C, p . Так при малых значениях параметра C и значении p , близком к единице, алгоритм (9) требует огромного числа итераций k_{\max} для сходимости к оптимальной точке. Для субградиентного метода последовательность субградиентов функции потерь не стремится к нулю, как это видно из рис. 1, 2. Сходимость этого метода связана с уменьшением шага итерации α_k .

Реализация алгоритма проксимального градиентного метода (8) оказывается более простой с точки зрения численной реализации и даже при постоянной величине шага α приводит к сходимости к точке минимума функции потерь $L(w)$, как правило, за небольшое количество итераций. Характерные зависимости различных величин при проксимальном градиентном спуске от номера итерации k представлены на рис. 3. Можно видеть, что и при применении проксимального градиентного метода последовательность субградиентов функции потерь $\nabla L(w^k)$ сходится не к нулевой точке, так же как при субградиентном методе. Сходимость проксимального метода хорошо характеризует величина $\|G(w^k)\|_2 = |w^{k+1} - w^k|/\alpha$, которая с увеличением числа итераций стремится к нулю, как это видно из рис. 3.

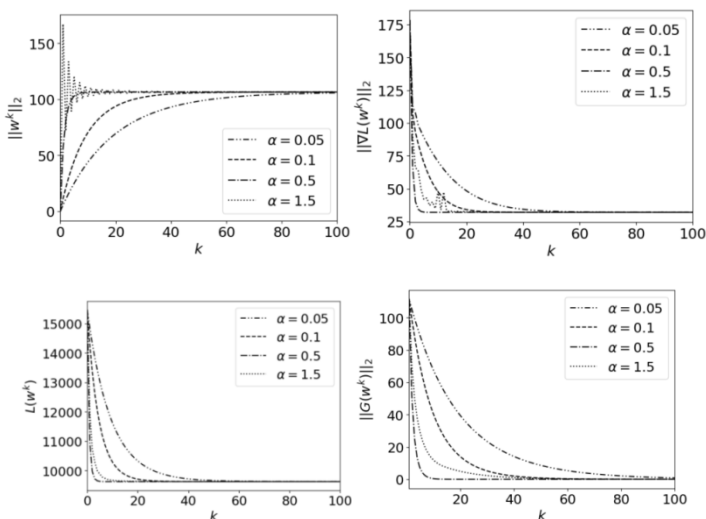


Рис. 3. Зависимости нормы $\|w^k\|_2$, нормы субградиента функции потерь $\|\nabla L(w^k)\|_2$, нормы $\|G(w^k)\|_2$, значения функции потерь $L(w^k)$ от номера итерации k , построенные по формуле (8) при $N = 200, m = 10, \mu = 30, w^0 = (0, 0, \dots, 0)$ и различных значений параметра α

При реализации L_1 регуляризации с помощью субградиентного или проксимального градиентного метода существенным отличием является то, что проксимальный метод при увеличении параметра регуляризации μ обнуляет компоненты вектора w , а метод субградиента только лишь уменьшает координаты вектора w до какого-то небольшого числа. Так, например, при $N = 200$, $m = 10$, $\mu = 30$, $w^0 = (0, 0, \dots, 0)$, $C = 0.6$, $p = 0.5$, $\alpha = 0.5$, $k_{\max} = 200000$ итерационные процессы по формулам (9) и (8) сходятся соответственно к точкам, представленным в таблице 1. При этом значения функции потерь равны

$$L_{\text{наилучшее}}(w_{\text{суб}}) = 9622.89, \quad L(w_{\text{prox}}) = 9622.83.$$

Разность в определении векторов $w = w_{\text{sub}} - w_{\text{prox}}$ можно охарактеризовать величинами $\|\Delta w\|_2$, $\max_i |\Delta w_i|$, которые для векторов, представленных в таблице 1 равны соответственно $\|\Delta w\|_2 = 0.075$, $\max_i |\Delta w_i| = 0.060$.

Точность определения функции потерь можно охарактеризовать абсолютной и относительной погрешностями

$$\Delta L = L(w_{\text{prox}}) - L_{\text{наилучшее}}(w_{\text{sub}}), \quad \delta L = \frac{|\Delta L|}{\bar{L}},$$

$$\bar{L} = \frac{L(w_{\text{prox}}) + L_{\text{наилучшее}}(w_{\text{sub}})}{2}.$$

Эти величины для векторов из таблицы 1 соответственно равны

$$\Delta L = -0.065, \quad \delta L = 6.82 \cdot 10^{-6}.$$

Численные расчеты, проведенные по (8) и (9), указывают на то, что разность между w_{sub} и w_{prox} не велика.

Это можно видеть из рис. 4.

Анализируя таблицу 1, видим, что для проксимального градиентного метода можно ввести величину n^{prox} , определяющую количество нулевых компонент вектора w_{prox} . Такая величина равна $n^{\text{prox}} = 4$. Для субградиентного метода целесообразно ввести величины $n_{0.01}^{\text{sub}}$ и $n_{0.1}^{\text{sub}}$, которые определяются как количество компонент вектора w_{sub} по абсолютной величине не превосходящих 0.01 и 0.1 соответственно. Такие величины равны $n_{0.01}^{\text{sub}} = 1$, $n_{0.1}^{\text{sub}} = 4$.

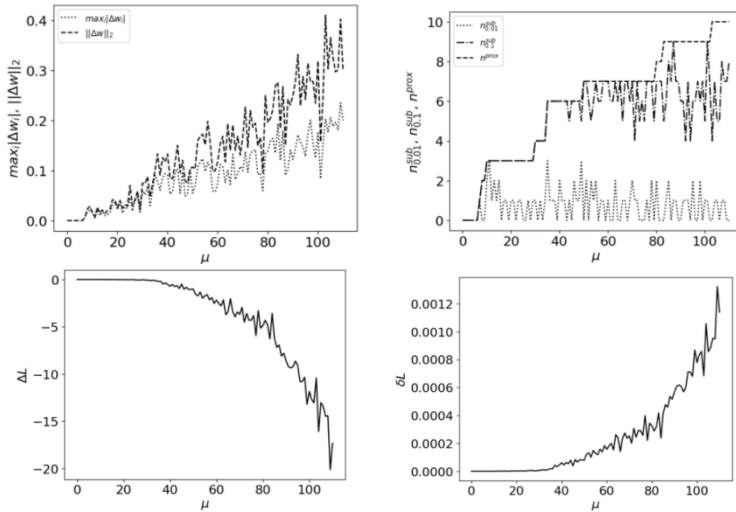


Рис. 4. Зависимость нормы разности решений $\|\Delta w\|_2$, максимальной абсолютной разности решений $\max_i |\Delta w_i|$, абсолютной ΔL и относительной δL разностей функции ошибки, числа нулевых компонент n^{prox} , чисел $n_{0.01}^{sub}$ и $n_{0.1}^{sub}$ от параметра регуляризации μ при $N = 200, m = 10, w^0 = (0, 0, \dots, 0), C = 0.6, p = 0.5, \alpha = 0.5, k_{max} = 200000$

Таблица 1. Точки w_{sub}, w_{prox} , к которым сходятся субградиентный и проксимальный градиентные методы

Номер координаты вектора	w_{sub}	w_{prox}
0	13.698917	13.701790
1	3.287433	3.2840325
2	5.390512	5.394641
3	0.001106	0
4	69.458649	69.459419
5	0.024428	0
6	57.052894	57.050521
7	0.059675	0
8	50.906111	50.902027
9	20.885228	20.887603
10	0.036949	0

Заключение. Подводя итог, следует отметить, что для численной реализации L_1 регуляризации можно применять как субградиентный, так и проксимальный градиентный метод. Разность решений, полученных при этих методах, будет незначительной. Однако проксимальный градиентный метод, как правило, сходится за меньшее число итераций и позволяет получить разреженное решение для весов модели w , в котором содержатся не числа, близкие к нулю, а точные нули.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *ShorNaum Z.* Minimization Methods for Non-differentiable Functions. Springer-Verlag, 1985. 164 p.
2. *Daubechies I.* An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint / I. Daubechies, M. Defrise, C. De Mol // Communications on Pure and Applied Mathematics. 2004. Vol. 57, no. 11. P. 1413-1457.

А. С. Правдивцева, В. В. Абрамов

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина
Россия, г. Рязань, e-mail: nastyappravdivceva@gmail.com,
v.abramov@rsu-rzn.ru

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

В работе решается задача квадратичного программирования с линейными ограничениями. Предполагается, что коэффициенты целевой функции и ограничений являются рациональными функциями вещественного параметра на некотором промежутке. Предложен метод приближенного вычисления точки глобального экстремума. В основе метода лежит формирование выборки точек экстремума для непараметрических задач при отдельных значениях параметра и аппроксимация точки экстремума как функции параметра дробно-рациональными функциями с помощью метода наименьших квадратов.

Ключевые слова: оптимизация, квадратичное программирование, параметр, метод наименьших квадратов

A. S. Pravdivtseva, V. V. Abramov

S.A. Yesenin Ryazan State University
Russia, Ryazan, e-mail: nastyappravdivceva@gmail.com,
v.abramov@rsu-rzn.ru

ABOUT ONE METHOD FOR SOLVING AN OPTIMIZATION PARAMETRIC PROBLEM

The paper solves the problem of quadratic programming with linear constraints. It is assumed that the coefficients of the objective function and constraints are rational functions of a real parameter on a certain interval. A method for approximating the global extremum point is proposed. The method involves generating a sample of extremum points for non-parametric problems at specific parameter values and approximating the extremum point as a function of the parameter using fractional-rational functions using the least squares method.

Keywords: optimization, quadratic programming, parameter, least squares method

Рассмотрим задачу квадратичной параметрической оптимизации

$$\begin{cases} f(x, t) = x^T A(t)x + b^T(t)x + c(t) \rightarrow \max, \\ x \in X_t \subset R^n: K(t)x \leq l(t), \quad t \in (T_1; T_2), \end{cases} \quad (1)$$

в которой все коэффициенты являются рациональными функциями параметра t степени не выше s , множество допустимых аргументов X_t является ограниченным при всех $t \in (T_1; T_2)$. В качестве решения требуется найти векторную функцию от параметра $\bar{x}(t) = \arg \max_{x_t} f(x, t)$. Ясно, что такая функция существует по теореме Вейерштрасса.

Заметим, что квадратичные параметрические задачи мало исследованы. Практически применимого алгоритма их решения в общем случае нет. В частности, зависимость от параметра может приводить к следующим проблемам: изменение типа выпуклости целевой функции $f(x, t)$, потеря включенности точки, подозрительной на экстремум, во множество допустимых аргументов X_t , изменение точки соприкосновения поверхности уровня целевой функции с границей X_t .

При фиксированном значении параметра t_0 задача (1) достаточно хорошо изучена. В частности, если $f(x, t_0)$ вогнута, то есть $x^T A(t_0)x < 0$ при любом $x \neq 0_n$, то решением задачи (1) является или точка, подозрительная на экстремум, $x(t_0) = -0,5A^{-1}(t_0)b(t_0)$ при условии включения в X_{t_0} , или граничная точка X_{t_0} , вычисляемая по схеме поиска условного экстремума на основе теоремы Куна–Таккера [1] или на основе геометрического метода [2]. С практической точки зрения такого рода вычисления эффективно реализуются на компьютере, например, в программе Excel.

Поэтому представляется целесообразным предложить приближенный способ решения задачи (1) на основе выборки решений при фиксированных значениях параметра.

Вычислим точки максимума $\bar{x}(t_p)$ и сами максимумы $f(\bar{x}(t_p), t_p)$ для задачи (1) на некоторой выборке параметров $t_p \in (T_1; T_2)$, $p = \overline{1, P}$.

Далее для функции $\bar{x}(t)$ выберем аппроксимацию $\tilde{x}(t, D)$, в которой D – это набор неопределенных коэффициентов. Вычислим этот набор методом наименьших квадратов, решив оптимизационную задачу вида

$$\begin{cases} F(D) = \alpha_1 F_1(D) + \alpha_2 F_2(D) \rightarrow \min, \\ \tilde{x}(t_p, D) \in X_{t_p}, \quad p = \overline{1, P}, \end{cases} \quad (2)$$

где целевая функция является выпуклой линейной комбинацией невязок

$$F_1(D) = \sum_{p=1}^P (\bar{x}(t_p) - \tilde{x}(t_p, D))^2, \quad F_2(D) = \sum_{p=1}^P (f(\bar{x}(t_p), t_p) - f(\tilde{x}(t_p, D), t_p))^2.$$

При этом возникает проблема выбора аппроксимации $\tilde{x}(t, D)$.

Рассмотрим первый случай. Допустим, при всех $x \neq 0_n$ и $t \in (a_1; a_2) \subseteq (T_1; T_2)$ выполняется условие $x^T A(t)x < 0$. Тогда $f(x, t)$ вогнута. В этом случае из необходимого условия экстремума получим $\bar{x}(t) = -0,5A^{-1}(t)b(t)$ при $t \in (a_1; a_2)$, если соблюдается ограничение $-0,5K(t)A^{-1}(t)b(t) \leq l(t)$. Учитывая свойство коэффициентов матрицы $A(t)$ и вектор-функции $b(t)$, в силу формулы для вычисления обратной матрицы, получим, что компоненты вектора $\bar{x}(t)$ – это дробно-рациональные функции со степенями числителя и знаменателя не выше s^n . Если при всех $t \in (T_1; T_2)$ условие $-0,5K(t)A^{-1}(t)b(t) \leq l(t)$ в рассматриваемом случае не выполняется, то есть точка, подозрительная на экстремум для целевой функции $f(x, t)$ не входит в допустимое множество X_t , то решение задачи (1) лежит на границе X_t . К этому же выводу приходим, если целевая функция оказывается вогнутой хотя бы на части промежутка $(T_1; T_2)$.

Рассмотрим второй случай. Допустим, решение $\bar{x}(t)$ задачи (1) на некотором промежутке значений параметра – это граничная точка множества X_t , ограниченного в силу неравенства $K(t)x \leq l(t)$ плоскостями типа $k_j^T(t)x = l_j(t)$, где $k_j(t)$ – строка j для $m \times n$ -матрицы $K(t)$, $l_j(t)$ – компонента j вектор-функции $l(t)$, $j = \overline{1, m}$, $n < m$. Тогда с геометрической точки зрения в точке $\bar{x}(t)$ происходит касание некоторой поверхности уровня целевой функции типа $f(x, t) = \text{const}$ с границей X_t . При этом через точку $\bar{x}(t)$ проходят $r \leq n$ граничных плоскостей и выполняется ограничение $K(t)\bar{x}(t) \leq l(t)$. Значит, для вычисления $\bar{x}(t)$ естественно рассматривать всевозможные системы вида

$$\begin{cases} K^{(0)}(t)x = l^{(0)}(t), \\ K^{(1)}(t)x < l^{(1)}(t), \end{cases} \quad (3)$$

в которых: первое условие – «носитель» $\bar{x}(t)$ – содержит основную $r \times n$ -матрицу $K^{(0)}(t)$, составленную из каких-то r строк матрицы $K(t)$, и вектор свободных членов $l^{(0)}(t)$, составленный из компонент $l(t)$ с теми же номерами, что и строки матрицы $K(t)$, вошедшие в $K^{(0)}(t)$; второе условие в виде неравенства содержит $(m-r) \times n$ -матрицу $K^{(1)}(t)$ из строк $K(t)$,

не вошедших в $K^{(1)}(t)$, и вектор-столбец $l^{(1)}(t)$ из компонент $l(t)$, не вошедших в $l^{(1)}(t)$. При решении «носителя» из (3) оказывается, что компоненты вектор-функции $\bar{x}(t)$ – это дробно-рациональные функции со степенями числителя и знаменателя не выше s^n .

Итак, целесообразно использовать следующий **вывод**: приближенное решение $\tilde{x}(t, D)$ задачи (1) вычисляется в виде вектора с компонентами

$\tilde{x}_i(t, D) = \sum_{v=0}^{s^n} d_{i1v} t^v / \sum_{s=0}^{s^n} d_{i2v} t^v$ на некоторой выборке значений параметра методом неопределенных коэффициентов (2).

Пример. Рассмотрим задачу (1) со следующими данными:

$$A(t) = \begin{pmatrix} -2+0,1t & 1-0,2t \\ 2 & -4-0,01t \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 15-0,4t \\ 10+0,02t \end{pmatrix}, \quad c(t) = -5+t,$$

$$K(t) = \begin{pmatrix} 10+t & 30-0,5t \\ 8+0,3t & 12 \end{pmatrix}, \quad l(t) = \begin{pmatrix} 150-0,6t \\ 90-t \end{pmatrix}, \quad t \in [0; 10].$$

Согласно выводу, приближенное решение ищем в виде вектора с дробно-рациональными компонентами порядка 2 в числителях и в знаменателях. Результаты вычисления, представленные на рис. 1.

				Выборки значений $x(t)$ и $f(x,t)$																
				t, p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10					
				$x_1(t, p)$	5,806452	5,738066	5,675438	5,616067	5,5598	5,505857	5,453433	5,401706	5,349848	5,29704	5,242495					
				$x_2(t, p)$	3,064516	2,924567	2,782577	2,638285	2,491529	2,34226	2,190558	2,036641	1,880874	1,723774	1,566004					
				$f(x,t, p)$	50,70395	51,73904	52,64864	53,42558	54,06078	54,54382	54,86355	55,009	54,97024	54,73948	54,31199					
Неопределённые коэффициенты D				Аппроксимация $x(t, p)$ и $-f(x,t, p)$ с помощью дробно-рациональной функции																
$-x_1(t)$	-0,01679	4,35645	2,73629	0,00456	0,75808	0,47118	-0,01151	1,7757	1,35306	5,807343	5,734996	5,675153	5,618013	5,562243	5,507449	5,45347	5,400223	5,347658	5,295743	5,244454
$-x_2(t)$	-0,2864	5,25974	4,14612	-0,01151	1,7757	1,35306	3,064258	2,925485	2,782795	2,637801	2,490728	2,341619	2,190466	2,037246	1,881925	1,724465	1,564825			
							50,70849	51,72267	52,64643	53,43307	54,07031	54,54977	54,86385	55,00501	54,96559	54,73765	54,31299			

Рис. 1. Пример вычисление в программе Excel коэффициентов приближенного решения задачи (1)

Итак, приближенное решение задачи (1) имеет вид

$$\tilde{x}(t, D) = \begin{pmatrix} (-0,01679t^2 + 4,35645t + 2,73629) / (0,00456t^2 + 0,75808t + 0,47118) \\ (-0,2864t^2 + 5,25974t + 4,14612) / (-0,01151t^2 + 1,7757t + 1,35306) \end{pmatrix}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гавурин М.К. Экстремальные задачи с линейными ограничениями / М.К. Гавурин, В.Н. Малоземов. Л.: изд-во ЛГУ, 1984. 176 с.
2. Правдивцева А.С. Геометрический метод решения задачи квадратичного программирования с вещественным параметром // XXVII Всероссийская студенческая научно-практическая конференция Нижневартовского государственного университета (г. Нижневартовск, 9–10 апреля 2025 г.) / под общ. ред. Б.Н. Махутова. Ч. 1. Нижневартовск: Издательство НВГУ, 2025. С. 210–215.

В. Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: vroitenberg@mail.ru

**О БИФУРКАЦИЯХ КОНТУРОВ,
ОБРАЗОВАННЫХ СЕПАРАТРИСАМИ ТРЕХ СЕДЕЛ,
В ТИПИЧНЫХ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВАХ
ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ**

Рассматривается типичное двухпараметрическое семейство векторных полей на плоскости с центральной симметрией. При нулевых значениях параметров предполагается, что система имеет седло в начале координат с седловым индексом большим 1, все сепаратрисы которого идут в два симметричных седла с седловым индексом меньшим 1. Описаны бифуркации такого семейства в окрестности контура, образованного указанными сепаратрисами и седлами для значений параметров, близких к нулю.

Ключевые слова: векторное поле на плоскости, центральная симметрия, седловая особая точка, сепаратриса, предельный цикл, бифуркационная диаграмма

V. Sh. Roitenberg

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: vroitenberg@mail.ru

**ON BIFURCATIONS OF CONTOURS
FORMED BY SEPARATRICES OF THREE SADDLES
IN GENERIC TWO-PARAMETRIC FAMILIES OF
VECTOR FIELDS WITH CENTRAL SYMMETRY**

We consider a generic two-parameter family of planar vector fields with central symmetry. At zero values of the parameters, it is assumed that the system has a saddle at the origin with a saddle index greeter than 1, all separatrices of which go to two symmetric saddles with a saddle index less than 1. Bifurcations of such a family are described in a neighborhood of the contour formed by the indicated separatrices and saddles for parameter values close to zero.

Keywords: planar vector field, central symmetry, saddle singular point, separatrix, limit cycle, bifurcation diagram

Типичные двухпараметрические бифуркации гладких динамических систем с центральной симметрией в окрестностях контуров, образованных

сепаратрисами трех седел с седловыми величинами одного знака, были описаны автором в работе [1]. Здесь мы рассмотрим более сложный случай, когда несимметричные седла разноплановые – седловые величины разных знаков.

Пусть имеется семейство векторных полей

$$X_\varepsilon(x) = F_1(x, \varepsilon)\partial/\partial x_1 + F_2(x, \varepsilon)\partial/\partial x_2, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

зависящее от двумерного параметра $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, меняющегося в окрестности нуля, такое, что векторные поля семейства инвариантны относительно центральной симметрии $S : x \mapsto -x$, то есть

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad X_\varepsilon(-x) = -X_\varepsilon(x).$$

Пусть $F_1, F_2 \in C^r$, где $r \geq 3$.

Будем считать, что для векторного поля X_0 выполняются следующие условия:

1) Точки $O = (0,0)$ и O_0^+ являются седлами поля X_0 с характеристическими показателями, соответственно, $\lambda_1^0 > 0$, $\lambda_2^0 < 0$ и $\lambda_1^+ > 0$, $\lambda_2^+ < 0$, при этом седловые величины $\lambda_1^0 + \lambda_2^0 < 0$, $\lambda_1^+ + \lambda_2^+ > 0$ и, соответственно, седловые индексы $\lambda^0 := -\frac{\lambda_2^0}{\lambda_1^0} > 1$ и $\lambda^+ := -\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+} < 1$. Пусть также $\lambda^0 \lambda^+ > 1$.

2) Входящая (выходящая) сепаратриса $L_{0\omega}^+$ ($L_{0\alpha}^+$) седла O_0^+ является и выходящей (входящей) сепаратрисой седла O .

Вследствие симметрии поля X_0 точка $O_0^- := S(O_0^+)$ является седлом поля с теми же характеристическими показателями, что и в O_0^+ , а $L_{0\omega}^- := S(L_{0\omega}^+)$ и $L_{0\alpha}^- := S(L_{0\alpha}^+)$ – сепаратрисы обоих седел O и O_0^- . Пусть $\Gamma^\pm := \overline{L_{0\omega}^\pm} \cup L_{0\alpha}^\pm$, $\Gamma := \Gamma^+ \cup \Gamma^-$, G^\pm – ограниченная область, границей которой является Γ^\pm .

3) Области G^\pm не содержат сепаратрис седел O_0^\pm , не принадлежащих контурам Γ^+ и Γ^- .

Выберем C^∞ -дуги $T_k : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $k = 1, 2$, трансверсальные траекториям поля X_0 , так, чтобы $T_1(0,1) \subset G^+$, $T_2(-1,0) \subset G^+$, $T_1(0) \in L_{0\alpha}^+$, $T_2(0) \in L_{0\omega}^+$.

При ε , достаточно близких к нулю, векторное поле X_ε имеет седло O , а также седла $O^+(\varepsilon)$ и $O^-(\varepsilon) = S(O^+(\varepsilon))$, C^r -гладко зависящие от ε и совпадающие при $\varepsilon = 0$, соответственно, с O_0^+ и O_0^- ; при этом для седлового индекса $\lambda(\varepsilon)$ седла O и седлового индекса $\lambda_+(\varepsilon)$ седла $O^+(\varepsilon)$ имеем $\lambda(\cdot), \lambda_+(\cdot) \in C^{r-1}$, $\lambda(0) = \lambda^0$, $\lambda_+(0) = \lambda^+$. Так как инвариантные многообразия седла C^{r-1} -гладко зависят от ε , то у седла O ($O^+(\varepsilon)$) имеется входящая (выходящая) сепаратриса $L_\omega^0(\varepsilon)$ ($L_\alpha^+(\varepsilon)$), пересекающая дугу $T_1(-1,1)$ в точке $T_1(\tau_{1,\omega}(\varepsilon))$ ($T_1(\tau_{1,\alpha}(\varepsilon))$) и выходящая (входящая) сепаратриса $L_\alpha^0(\varepsilon)$ ($L_\omega^+(\varepsilon)$), пересекающая дугу $T_2(-1,1)$ в точке $T_2(\tau_{2,\omega}(\varepsilon))$ ($T_2(\tau_{2,\alpha}(\varepsilon))$), при этом $\tau_{k,\alpha}(\cdot), \tau_{k,\omega}(\cdot) \in C^{r-1}$, $\tau_{k,\alpha}(0) = \tau_{k,\omega}(0) = 0$, $k = 1, 2$.

Пусть для функций $\tau_k(\varepsilon) := \tau_{k,\omega}(\varepsilon) - \tau_{k,\alpha}(\varepsilon)$, $k = 1, 2$, выполняется условие

$$4) \quad \det(\partial \tau_k(0) / \partial \varepsilon_i) \neq 0.$$

Тогда, без ограничения общности можно считать, что параметры выбраны так, что

$$\tau_1(\varepsilon) \equiv \varepsilon_1, \quad \tau_2(\varepsilon) \equiv \varepsilon_2. \quad (1)$$

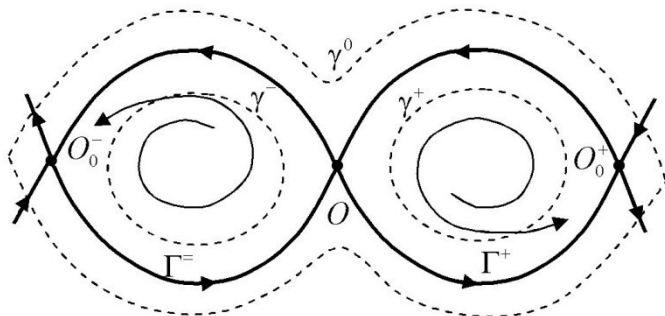


Рис. 1. Сепаратрисный контур $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$

Теорема. Для семейства X_ε векторных полей, удовлетворяющих условиям 1)–4), существуют

1) окрестность $U(\Gamma)$ сепаратрисного контура Γ с границей, состоящей из простых замкнутых кривых γ^+ , γ^- и γ^0 , для которых

$\gamma^- = S(\gamma^+)$, $\gamma^\pm \subset D^\pm$, $\gamma^0 = S(\gamma^0)$, а область, ограниченная γ^0 , содержит γ^+ и γ^- (рис. 1),

2) число $\delta > 0$ и разбиение области параметров $E = (-\delta, \delta)^2$ на множества $B_0 = \{(0,0)\}$, B_i , $i = 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$, $B_{1,n}$, $B_{5,n}$, $n \in \mathbb{N}$, E_j , $j = 3, 6, 7, 8, 9$, $E_{1,n}$, $E_{4,n}$, $n \in \mathbb{N}$ (рис. 2), где $B_{1,0} = (0, \delta) \times \{0\}$, $B_{5,0} = \{0\} \times (0, \delta)$, $B_6 = (-\delta, 0) \times \{0\}$, $B_9 = \{0\} \times (-\delta, 0)$, а $B_{1,n}$, $B_{5,n}$ ($n \geq 2$), B_i ($i = 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$), – открытые C^1 -дуги, входящие в начало координат по направлению оси ε_1 , такие, что схемы фазовых портретов векторных полей X_ε , $\varepsilon \in E$, в окрестности $U(\Gamma)$ имеют вид, изображенный на рис. 3.

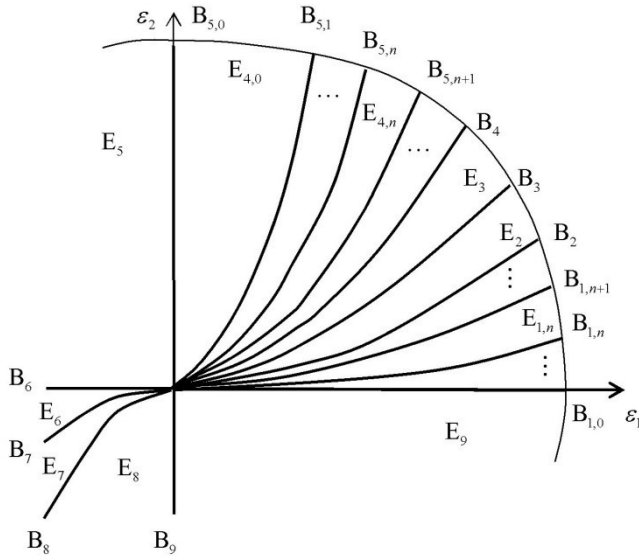


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма

Доказательство. Выберем столь малое $\delta_0 > 0$, что

$$\lambda(\varepsilon) > 1 / \lambda_+(\varepsilon) > a > 1 \text{ для всех } \varepsilon \in (-\delta_0, \delta_0)^2. \quad (2)$$

Из [2, п. 13.8] и (1) следует, что при достаточно малых $\delta_1 \in (0, \delta_0]$ и $u_1 > 0$ определены отображение

$$ST_1(\tau_{1,\alpha}(\varepsilon) + u) \mapsto T_2(\tau_{2,\alpha}(\varepsilon) + \chi_1(u, \varepsilon)), \quad u \in (0, \varepsilon_1),$$

по траекториям поля X_ε , $\varepsilon \in (0, \delta_1)^2$ и отображение

$$T_1(\tau_{1,\alpha}(\varepsilon) + u) \text{ а } T_2(\tau_{2,\alpha}(\varepsilon) + \chi_2(u, \varepsilon)), \quad u \in (0, u_1)$$

по траекториям поля $-X_\varepsilon$, $\varepsilon \in (0, \delta_1) \times (-\delta_1, \delta_1)$, такие, что

$$\chi_1(u, \varepsilon) = (\varepsilon_1 - u)^{\lambda(\varepsilon)} c_1(\varepsilon) + r_1(\varepsilon_1 - u, \varepsilon), \quad (3)$$

где $c_1 \in C^1$, $c_1(\varepsilon) > 0$,

$$\left\| \partial^{i+j} r_1(v, \varepsilon) / \partial v^i \partial \varepsilon^j \right\| \leq v^{\lambda(\varepsilon) - i + s}, \quad 0 < s < 1, \quad 0 \leq i + j \leq 2, \quad (4)$$

$$\chi_2(u, \varepsilon) = \varepsilon_2 - u^{1/\lambda_s(\varepsilon)} c_2(\varepsilon) + r_2(u, \varepsilon), \quad (5)$$

где $c_2 \in C^1$, $c_2(\varepsilon) > 0$,

$$\left\| \partial^{i+j} r_k(u, \varepsilon) / \partial u^i \partial \varepsilon^j \right\| \leq u^{1/\lambda_s(\varepsilon) - i + \sigma}, \quad 0 < \sigma < 1, \quad 0 \leq i + j \leq 2. \quad (6)$$

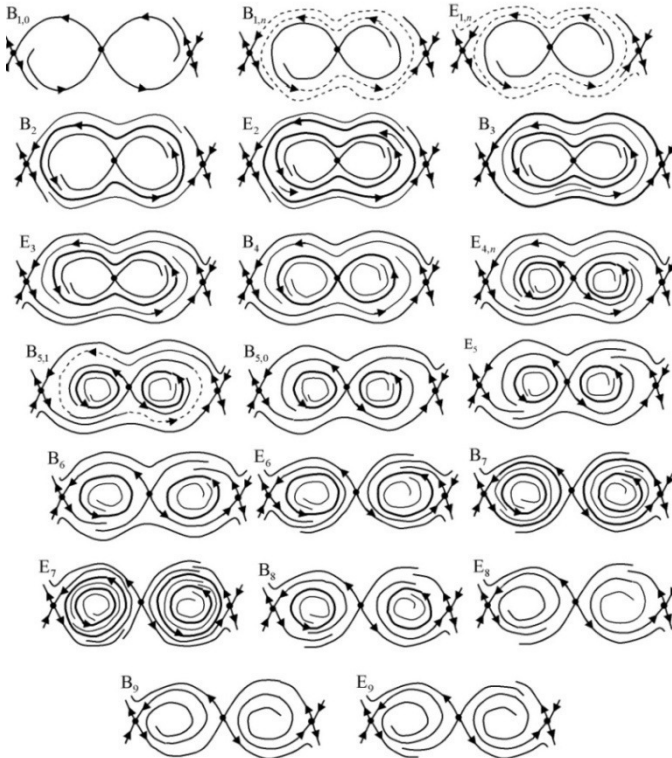


Рис. 3. Бифуркации в окрестности $U(\Gamma)$

Доопределим $\chi_1(u, \varepsilon)$ при $u = \varepsilon_1$, положив $\chi_1(\varepsilon_1, \varepsilon) = 0$, и $\chi_2(u, \varepsilon)$ при $u = 0$, положив $\chi_2(0, \varepsilon) = 0$. Пусть

$$\Delta(u, \varepsilon) := \chi_2(u, \varepsilon) - \chi_1(u, \varepsilon), \quad u \in [0, \varepsilon_1], \quad \varepsilon \in (0, \delta_1) \times (-\delta_1, \delta_1).$$

Лемма. *Через точку $ST_1(\tau_{1,\alpha}(\varepsilon) + u_0)$ проходит периодическая траектория поля X_ε тогда и только тогда, когда $\Delta(u_0, \varepsilon) = 0$. Эта траектория является устойчивым (неустойчивым) предельным циклом, если $\Delta'_u(u_0, \varepsilon) > 0$ ($\Delta'_u(u_0, \varepsilon) < 0$) и двойным циклом, если $\Delta'_u(u_0, \varepsilon) = 0$, $\Delta''_{uu}(u_0, \varepsilon) \neq 0$.*

Считая δ_1 достаточно малым, из (2)–(4) получаем для всех $\varepsilon \in (0, \delta_1) \times (-\delta_1, \delta_1)$, $u \in (0, \varepsilon_1)$

$$\Delta'_u(0, \varepsilon) > 0, \quad \Delta'_u(\varepsilon_1, \varepsilon) < 0, \quad (7)$$

$$\Delta''_{uu}(u, \varepsilon) < 0, \quad (8)$$

$$\Delta'_{\varepsilon_2}(u, \varepsilon) > 0, \quad (9)$$

$$\Delta(0, \varepsilon) = \varepsilon_2 - \varepsilon_1^{\lambda(\varepsilon)} c_1(\varepsilon) - r_1(\varepsilon_1, \varepsilon), \quad (10)$$

$$\Delta(\varepsilon_1, \varepsilon) = \varepsilon_2 - \varepsilon_1^{1/\lambda_+(\varepsilon)} c_2(\varepsilon) + r_2(\varepsilon_1, \varepsilon). \quad (11)$$

Ввиду (10), (4), (11) и (6) $\Delta(0, \varepsilon)$ и $\Delta(\varepsilon_1, \varepsilon)$ можно доопределить до C^1 -функций на $(-\delta_1, \delta_1)^2$, положив $\Delta(0, \varepsilon) = \Delta(\varepsilon_1, \varepsilon) := \varepsilon_2$ при $\varepsilon \in (-\delta_1, 0] \times (-\delta_1, \delta_1)$. При этом

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} \Delta(0, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} \Delta(\varepsilon_1, \varepsilon) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \Delta(0, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \Delta(\varepsilon_1, \varepsilon) = 1,$$

и по теореме о неявной функции получаем, что существуют такие $\delta_2 \in (0, \delta_1]$ и C^1 -функции $\beta_k : (-\delta_2, \delta_2) \rightarrow (-\delta_2, \delta_2)$, $k = 3, 4$,

$$\beta_k(0) = \beta'_k(0) = 0, \quad (12)$$

что $\forall \varepsilon_1 \in (-\delta_2, \delta_2)$ $\varepsilon_2 = \beta_3(\varepsilon_1)$ (соотв. $\varepsilon_2 = \beta_4(\varepsilon_1)$) является единственным решением уравнения $\Delta(0, \varepsilon) = 0$ (соотв. $\Delta(\varepsilon_1, \varepsilon) = 0$). Из (10), (4), (11), (6), (12) и условия $\lambda^0 \lambda^+ > 1$ теперь следует, что δ_2 можно считать столь малым, что при $\varepsilon_1 \in (0, \delta_2)$

$$0 < \beta_3(\varepsilon_1) = c_1(0) \varepsilon_1^{\lambda^0} + o(\varepsilon_1^{\lambda^0}) < \beta_4(\varepsilon_1) = c_1(0) \varepsilon_1^{1/\lambda^+} + o(\varepsilon_1^{1/\lambda^+}). \quad (13)$$

Вследствие (9)

$$\forall \varepsilon_1 \in (0, \delta_2) \quad \text{sgn} \Delta(0, \varepsilon) = \text{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_3(\varepsilon_1)), \quad \text{sgn} \Delta(\varepsilon_1, \varepsilon) = \text{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_4(\varepsilon_1)). \quad (14)$$

Ввиду (3)–(6) можно считать

$$\Delta(u, \varepsilon) < 0 \text{ при всех } u \in [0, \varepsilon_1], \varepsilon \in (0, \delta_1) \times \{0\}. \quad (15)$$

Вследствие (7) и (8)

$$\operatorname{sgn} \Delta'_u(u, \varepsilon) = \operatorname{sgn}(u_M(\varepsilon) - u) \text{ при всех } u \in [0, \varepsilon_1], \varepsilon \in (0, \delta_2) \times (-\delta_2, \delta_2), \quad (16)$$

где $u_M - C^1$ -функция, $\forall \varepsilon \in (0, \delta_2) \times (-\delta_2, \delta_2) \quad 0 < u_M(\varepsilon) < \varepsilon_1$.

Из (14) и (16) имеем

$$\Delta(u_M(\varepsilon), \varepsilon) > 0 \text{ для всех } \varepsilon_1 \in (0, \delta_2), \varepsilon_2 = \beta_3(\varepsilon_1). \quad (17)$$

Из (9) и (16) получаем

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \Delta(u_M(\varepsilon), \varepsilon) = \Delta'_{\varepsilon_2}(u, \varepsilon) \Big|_{u=u_M(\varepsilon)} > 0 \quad \forall \varepsilon \in (0, \delta_2) \times (-\delta_2, \delta_2). \quad (18)$$

Из (15), (17) и (18) следует, что существует C^1 -функция $\beta_2 : (0, \delta_2) \rightarrow (0, \delta_2)$ такая, что $\forall \varepsilon_1 \in (0, \delta_2) \quad 0 < \beta_2(\varepsilon_1) < \beta_3(\varepsilon_1)$ и

$$\operatorname{sgn} \Delta(u_M(\varepsilon), \varepsilon) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_2(\varepsilon_1)) \text{ при всех } \varepsilon \in (0, \delta_2) \times (-\delta_2, \delta_2). \quad (19)$$

Пусть

$$\delta \in (0, \delta_2], E := \{\varepsilon : \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 < \delta^2\}, B_k := \{\varepsilon \in E : \varepsilon_2 = \beta_k(\varepsilon_1)\}, k = 2, 3, 4.$$

$$E_m := \{\varepsilon \in E : \beta_m(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \beta_{m+1}(\varepsilon_1)\}, m = 2, 3, l_\varepsilon := ST_1[\tau_{1,\alpha}(\varepsilon), \tau_{1,\alpha}(\varepsilon) + \varepsilon_1].$$

Из (14), (19) и леммы при достаточно малых δ получаем следующие утверждения:

При $\varepsilon \in E$, $\varepsilon_2 < \beta_2(\varepsilon_1)$ и $\varepsilon_2 > \beta_4(\varepsilon_1)$ дугу l_ε не пересекают периодические траектории поля X_ε .

При $\varepsilon \in B_2$ через точку $ST_1(\tau_{1,\alpha}(\varepsilon) + u_M(\varepsilon))$ дуги l_ε проходит двойной цикл $\Gamma(\varepsilon)$ поля X_ε ; сепаратриса $L_\alpha^0(\varepsilon)$ ($L_\omega^+(\varepsilon)$) ω -предельна (α -предельна) к $\Gamma(\varepsilon)$.

При $\varepsilon \in E_2$ дугу l_ε пересекают две периодические траектории: гиперболические устойчивый и неустойчивый предельные циклы $\Gamma_s(\varepsilon)$ и $\Gamma_u(\varepsilon)$; сепаратриса $L_\alpha^0(\varepsilon)$ ($L_\omega^+(\varepsilon)$) ω -предельна (α -предельна) к $\Gamma_s(\varepsilon)$ ($\Gamma_u(\varepsilon)$).

При $\varepsilon \in B_3$ дугу l_ε пересекает единственная периодическая траектория: гиперболические устойчивый предельный цикл $\Gamma_s(\varepsilon) = S\Gamma_s(\varepsilon)$; сепаратрисы $L_\alpha^0(\varepsilon)$ и $SL_\alpha^0(\varepsilon)$ ω -предельны к $\Gamma_s(\varepsilon)$, а сепаратрисы $L_\omega^+(\varepsilon)$

и $L_\alpha^+(\varepsilon)$ совпадают соответственно с сепаратрисами $SL_\alpha^+(\varepsilon)$ и $SL_\omega^+(\varepsilon)$, образуя устойчивый контур $\Gamma_u(\varepsilon) := \overline{L_\omega^+(\varepsilon) \cup L_\alpha^+(\varepsilon)}$.

При $\varepsilon \in E_3$ дугу l_ε пересекает единственная периодическая траектория – гиперболический устойчивый предельный цикл $\Gamma_s(\varepsilon)$; сепаратриса $L_\alpha^0(\varepsilon)$, $SL_\alpha^0(\varepsilon)$, $L_\omega^+(\varepsilon)$ и $SL_\omega^+(\varepsilon)$ ω -предельны к $\Gamma_s(\varepsilon)$.

При $\varepsilon \in B_3$ дугу l_ε не пересекают периодические траектории; сепаратрисы $L_\alpha^0(\varepsilon)$ и $L_\omega^0(\varepsilon)$ ($SL_\alpha^0(\varepsilon)$ и $SL_\omega^0(\varepsilon)$) совпадают, образуя вместе с точкой O устойчивую петлю $\Gamma_s(\varepsilon)$ ($SL_\omega^0(\varepsilon)$); сепаратрисы $L_\alpha^+(\varepsilon)$ и $SL_\alpha^+(\varepsilon)$ ω -предельны к «восьмерке» $\Gamma_s(\varepsilon) \cup SL_\omega^0(\varepsilon)$.

Существование бифуркационных кривых $B_{1,n}$, соответствующих совпадающим сепаратрисам $L_\alpha^0(\varepsilon) = L_\omega^+(\varepsilon)$ и $SL_\alpha^0(\varepsilon) = SL_\omega^+(\varepsilon)$, и бифуркационных кривых $B_{5,n}$, соответствующих совпадающим сепаратрисам $L_\alpha^+(\varepsilon) = L_\omega^0(\varepsilon)$ и $SL_\alpha^+(\varepsilon) = SL_\omega^0(\varepsilon)$, доказывается аналогично [3, с. 17–18].

Бифуркации в окрестности предельного контура, образованного сепаратрисам двух разноплановых седел, впервые были описаны в работе [4] (см. также [5, с. 109]). При нашем выборе параметров и соотношения седловых индексов бифуркации в окрестностях контуров Γ^+ и Γ^- изображены на рис. 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркации сепаратрисных контуров динамических систем с центральной симметрией // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование: межвуз. сб. науч. тр. / отв. ред. С.С. Мамонов. Вып. 4. 2022. С. 94–98.
2. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2 / Л.П. Шильников, А.Л. Шильников, Д.В. Тураев, Л. Чуа. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», ИКИ, 2009. 548 с.
3. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях полицикла, образованного сепаратрисами четырех седел динамической системы, инвариантной при инволюции, имеющей кривую из неподвижных точек. II // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер.: Естественно-математические и технические науки. 2025. Вып. 2 (361). С. 11–19. DOI: 10.53598/2410-3225-2025-2-361-11-19.
4. *Ноздрачева В.П.* Бифуркации особого цикла с двумя сепаратрисами // Интегральные и дифференциальные уравнения и приближенные решения: Сб. науч. тр. Калмык, ун-т. Элиста, 1985. С. 107–124.
5. Теория бифуркаций / В.И. Арнольд, В.С. Афраймович, Ю.С. Ильяшенко, Л.П. Шильников // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы 5. М.: ВИНТИ АН СССР, 1986. Т. 5. С. 1–218.

К. П. Шиндина, В. В. Абрамов

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина
Россия, г. Рязань, e-mail: shindina.ks@yandex.ru, v.abramov@rsu-rzn.ru

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ С ЧИСЛОВЫМ ПАРАМЕТРОМ

В работе рассматривается игра, в которой коэффициенты матрицы выигрышей являются рациональными функциями времени. Предложен метод приближенного вычисления оптимальных смешанных стратегий. В основе метода формирование выборок стратегий с помощью решения двойственных задач линейного программирования и аппроксимация смешанных стратегий дробно-рациональными функциями с помощью метода наименьших квадратов. Предложена схема использования полученного результата для производственного планирования.

Ключевые слова: матричная игра, линейное программирование, метод наименьших квадратов, оптимизация

K. P. Shindina, V. V. Abramov

S.A. Yesenin Ryazan State University
Russia, Ryazan, e-mail: shindina.ks@yandex.ru, v.abramov@rsu-rzn.ru

APPROXIMATE SOLUTION OF A MATRIX GAME WITH A NUMERICAL PARAMETER

The paper considers a game in which the coefficients of the payoff matrix are rational functions of time. A method for approximating the optimal mixed strategies is proposed. The method involves generating samples of strategies by solving the dual linear programming problems and approximating the mixed strategies with fractional-rational functions using the least squares method. A scheme for using the obtained result for production planning is proposed.

Keywords: matrix game, linear programming, least squares method, optimization

Рассмотрим антагонистическую игру двух лиц с $n \times m$ -матрицей выигрышей $A(t) = (a_{ij}(t))$, в которой коэффициенты $a_{ij}(t)$ являются многочленами степеней не выше w от времени $t \in [0; T]$.

Задача: найти решение игры в смешанных стратегиях.

При постоянной матрице выигрышей решение традиционной подход к решению поставленной игровой задачи заключается в сведении ее к

решению двойственных задач линейного программирования [1]. Однако в рассматриваемом случае задачи линейного программирования оказываются параметрическими. Для них достаточно изученным является только случай линейной зависимости коэффициентов от параметра. Другой естественный подход к решению поставленной игровой задачи [2] основан на вычислении седловой точки функции среднего выигрыша в смешанных стратегиях. Для полученной таким образом пары смешанных стратегий в виде векторных функций параметра требуется проверить условия допустимости. Эта проверка сводится к решению системы неравенств для параметра. Оба указанных подхода приводят к существенным вычислительным затруднениям в рассматриваемом случае и не являются надежной алгоритмической основой для компьютерных вычислений. Поэтому целесообразно использовать **алгоритм приближенного решения игры**.

1. Составляются K двойственных непараметрических задач:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(p) = \sum_{i=1}^n p_i \rightarrow \min, \\ B(t_k)^T p \geq E_m, p_i \geq 0, i = \overline{1, n}; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} g(q) = \sum_{j=1}^m q_j \rightarrow \max, \\ B(t_k)q \leq E_n, q_j \geq 0, j = \overline{1, m}, \end{array} \right. \quad (1)$$

в которых: $t_k \in [0; T]$, $k = \overline{1, K}$ – выборка значений моментов времени;

$B(t) = (b_{ij}(t))$, $b_{ij}(t) = a_{ij}(t) + 2 \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \left| \min_{[0; T]} a_{ij}(t) \right|$ – вспомогательная матрица

выигрышей (матрица с положительной нижней ценой игры); E_m и E_n – столбцы из n и из m единиц соответственно,

2. Вычисляются выборки значений оптимальных смешанных стратегий: для игрока 1 – $x(t_k) = \frac{1}{f(p^{(k)})} p^{(k)}$, для игрока 2 – $y(t_k) = \frac{1}{g(q^{(k)})} q^{(k)}$,

где векторы $p^{(k)}$, $q^{(k)}$ – решения задач (1), для которых согласно теории двойственности $f(p^{(k)}) = g(q^{(k)})$, $k = \overline{1, K}$.

3. Для вектор-функций $x(t)$ и $y(t)$ оптимальных смешанных стратегий, которые требуется найти в поставленной задаче, выбираются аппроксимации $\tilde{x}(t, a)$ и $\tilde{y}(t, b)$ соответственно с наборами неопределенных коэффициентов a и b . Для вычисления этих коэффициентов используется целевой критерий

$$S(a, b) = \alpha_1 \cdot H(a) + \alpha_2 \cdot G(b) + \alpha_3 \cdot F(a, b) \rightarrow \min, \quad (2)$$

который представляет собой выпуклую линейную комбинацию квадратичных невязок

$$H(a) = \sum_{k=1}^K (x(t_k) - \tilde{x}(t_k, a))^2, \quad G(b) = \sum_{k=1}^K (y(t_k) - \tilde{y}(t_k, b))^2,$$

$$F(a, b) = \sum_{k=1}^K (x^T(t_k) A(t_k) y(t_k) - \tilde{x}^T(t_k, a) A(t_k) \tilde{y}(t_k, b))^2,$$

где квадраты являются скалярными.

Целесообразный выбор аппроксимирующих моделей заключается в следующем. С учетом условия нормировки $\sum_{i=1}^n x_i = 1, \sum_{j=1}^m y_j = 1$ векторов

смешанных стратегий $x = (x_1, \dots, x_n)^T, y = (y_1, \dots, y_m)^T$ для функции среднего выигрыша $f(x, y, t) = x^T A(t) y$ составим необходимые условия экстремума

$\begin{cases} f'_x = 0_n, \\ f'_y = 0_m. \end{cases}$ Так как любая матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях, то из необходимых условий получим без учета ограничений компоненты седловой точки в виде отношений многочленов степеней не выше $u = w(\max(n, m) - 1)$. Кроме того, учтем тот факт, что при достаточно больших показателях степеней числителя и знаменателя для функций одной переменной эффективна Паде-аппроксимация. Таким образом, для целевой функции в критерии (2) целесообразно использовать модели смешанных стратегий в виде векторов $\tilde{x}(t, a)$ и $\tilde{y}(t, b)$ с компонентами

$$\tilde{x}_i(t, a) = \frac{\sum_{s=0}^u a_{i1s} t^s}{\sum_{s=0}^u a_{i2s} t^s}, \quad \tilde{y}_j(t, b) = \frac{\sum_{s=0}^u b_{j1s} t^s}{\sum_{s=0}^u b_{j2s} t^s}.$$

В результате применения предложенного здесь алгоритма в качестве решения поставленной задачи получим приближенные значения $\tilde{x}(t, a)$ и $\tilde{y}(t, b)$ оптимальных смешанных стратегий игроков и оптимальной средней цены игры $\tilde{x}^T(t, a) A(t) \tilde{y}(t, b)$.

Заметим, что задачи (1) и (2) эффективно решаются на компьютере, например, в программе Excel.

Предложенный метод можно применить для принятия экономических решений.

Управление производством в рыночных условиях связано с неопределенностью: предприятие, выпускающее несколько видов продукции, не может точно предсказать, какие условия сбыта сложатся в будущем. Производственный план, демонстрирующий максимальную эффективность в рамках одного рыночного сценария, может привести к потерям при реализации другого сценария. Для исключения риска при прогнозировании

прибыли целесообразно предположить наличие конфликта интересов: предприятие стремится максимизировать прибыль, выбирая определенные объемы производства, а рынок (условный противник) формирует такие условия спроса, которые могут эту прибыль уменьшить. Если приняты временные прогнозы экономических показателей, то для вычисления плана сбыта целесообразно применить параметрическую матричную игровую модель.

Пусть игрок 1 – предприятие, игрок 2 – рынок. Допустим, чистые стратегии игрока 1 – векторы объемов производства $p_i = (p_{di})$, $i = \overline{1, n}$ – номер плана, $d = \overline{1, D}$ – номер товара, стратегии игрока 2 – векторы прогнозируемых объемов спроса на эти товары при различных рыночных сценариях $v_j = (v_{dj})$, $j = \overline{1, n}$ – номер сценария. Каждый игрок независимо выбирает свою стратегию в каждый момент $t \in [0; T]$.

Допустим, при $t \in [0; T]$ определены вектор-функции с рациональными компонентами: $c(t)$ – прогноз себестоимостей производства товаров, $s(t)$ – прогноз отпускных цен на товары. Тогда матрица выигрышей $A(t) = (a_{ij}(t))$ составляется из прибылей предприятия $a_{ij}(t) = q_{ij} \cdot s(t) - p_i \cdot c(t)$, где $q_{ij} = \min(p_i; v_j)$ – объёмы продаж в каждой игровой ситуации $(p_i; v_j)$ для каждого товара определяются, далее вычисляется прибыль игрока 1.

Применив предложенный алгоритм для предприятия, получим для $t \in [0; T]$ оптимальный усредненный динамический план производства

$\bar{p}(t) = \sum_{i=1}^n p_i \tilde{x}_i(t, a)$, при котором $\tilde{x}^T(t, a)A(t)\tilde{y}(t, b)$ – безрисковый прогноз максимальной средней прибыли.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория игр / В.В. Абрамов, С.С. Мамонов, Н.А. Мишакова, У.Н. Эфендиев. Рязань: РГУ им. С.А. Есенина, 2016. 88 с.
2. Шиндина К.П. Игровая модель сбыта // XXVII Всероссийская студенческая научно-практическая конференция Нижневартковского государственного университета (г. Нижневартковск, 9–10 апреля 2025 г.) / под общей ред. Б. Н. Махутова. Ч. 1. Естественные и точные науки. Нижневартковск : Изд-во НВГУ, 2025. С. 221–226.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

УДК 51:378

М. А. Башкин, В. С. Силин

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П. А. Соловьева

Россия, г. Рыбинск, e-mail: mbashkin@rsatu.ru

ОДИН ИЗ АСПЕКТОВ ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ПРЕПОДАВАНИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ДИСЦИПЛИН

Повышение качества преподавания фундаментальных дисциплин является сложной и вместе с тем интересной задачей. В статье вопрос повышения качества решается за счет введения дополнительной факультативной дисциплины. Этот подход позволяет подтянуть знания у слабых студентов, облегчить изучение высшей математики в первом семестре на первом курсе. Обеспечивает выравнивание знаний у группы по окончании курса.

Ключевые слова: фундаментальные дисциплины, повышение качества образования, высшая математика

M. A. Bashkin, V. S. Silin

P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University
Russia, Rybinsk, e-mail: mbashkin@rsatu.ru

ONE OF THE ASPECTS OF IMPROVING THE QUALITY OF TEACHING FUNDAMENTAL DISCIPLINES

Improving the quality of teaching fundamental disciplines is a difficult and at the same time interesting task. In the article, the issue of quality improvement is solved by introducing an additional optional discipline. This approach makes it possible to improve the knowledge of weak students, to facilitate the study of higher mathematics in the first semester in the first year. Ensures the alignment of knowledge among the group at the end of the course.

Keywords: fundamental disciplines, improving the quality of education, higher mathematics

В целях реализации «Программы повышения качества преподавания фундаментальных дисциплин на 2024-2025 гг. ФГБОУ ВО «Рыбинский государственный авиационный технический университет имени

П.А. Соловьева» на основании решения Ученого совета по основным направлениям подготовки с 1 сентября 2025 года введена в первом семестре факультативная дисциплина «Дополнительные главы по математике». Целью введения дисциплины является помощь студентам в ликвидации пробелов по школьному курсу математики и в освоении высшей математики в первом семестре первого курса.

Так как вуз является техническим, то руководством была поставлена задача сделать программу «Дополнительных глав по математике» таким образом, чтобы она могла стать основой для освоения курса физики, который читается со второго семестра. Разработка программы была поручена заведующим кафедрами высшей математики и общей и технической физики. В основу концепции были положены хорошо известные в педагогике принципы доступности, систематичности и последовательности, наглядности, сознательности и активности, прочности, связи с практикой (см. [1]). В результате появилась программа, состоящая из пяти разделов:

1. Раздел «Векторы». Общий объем раздела 10 часов, из них 4 часа практических занятий и 6 часов самостоятельной работы. С векторами ребята встречаются еще в школьном курсе. Соответствующая задача есть в профильном ЕГЭ, а векторный метод позволяет решать сложные задачи из второй части этого экзамена. Векторы изучаются в курсе «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» в первом семестре и далее в курсе физики для описания физических величин.

2. Раздел «Функции и графики». Общий объем раздела 28 часов, из них 12 часов практических занятий и 16 часов самостоятельной работы. Здесь повторяются основные типы функций, изучаемых в школьном курсе. Строятся графики в декартовой и полярной системах координат. Студенты знакомятся с логарифмическими координатами.

3. Раздел «Решение уравнений и систем». Общий объем раздела 14 часов, из них 6 часов практических занятий и 8 часов самостоятельной работы. Решение уравнений первого и второго порядков входит в школьный курс. В этот раздел включены различные методы решения уравнений второго порядка и методы решения специальных видов уравнений больших порядков. Системы линейных уравнений так же рассматриваются в школе (метод исключений), а далее изучаются в курсе «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» в первом семестре. Причем на «Дополнительных главах по математике» уже идет повторение изученных методов решения систем.

4. Раздел «Дифференцирование». Общий объем раздела 10 часов, из них 4 часа практических занятий и 6 часов самостоятельной работы. Дифференцирование функции одной переменной входит в школьный курс математики, профильный ЕГЭ по математике и изучается в курсе «Матема-

тический анализ» с первого семестра в университете. Со второго семестра эта тема будет использоваться в курсе «Общая физика» для описания движения тела.

5. Раздел «Интегрирование». Общий объем раздела 10 часов, из них 4 часа практических занятий и 6 часов самостоятельной работы. Этот раздел завершающий. Понятие первообразной можно встретить в школьном курсе математики, хотя в задачах на ЕГЭ мы его не встречали. Здесь он изучается параллельно с соответствующей частью курса «Математический анализ». Рассматриваются задачи на преобразование функций и вычисление физических величин. Например, таких как объем, масса, работа, сила. Все это призвано облегчить в следующем втором семестре изучение курса физики.

В соответствии с реализуемой вузом балльно-рейтинговой системой (см. [2]) по «Дополнительным главам математики» предусмотрены входная и итоговая работы. Каждая работа состоит из 10 задач разной степени сложности. В среднем в работе берется по две задачи из каждого раздела. Одна проще, вторая сложнее. На входной работе по пятому разделу берется одна задача, и еще одна задача берется на умение проводить вычисления. Каждая задача оценивается в 10 баллов. Таким образом, максимум за работу – 100 баллов.

Мы провели исследование на двух потоках Института информационных технологий и систем управления. Назовем их А (рис. 1) и Б (рис. 2). Каждый поток состоял из 25 человек. Поток А имеет программистскую направленность, Б – экономическую.

Поток А

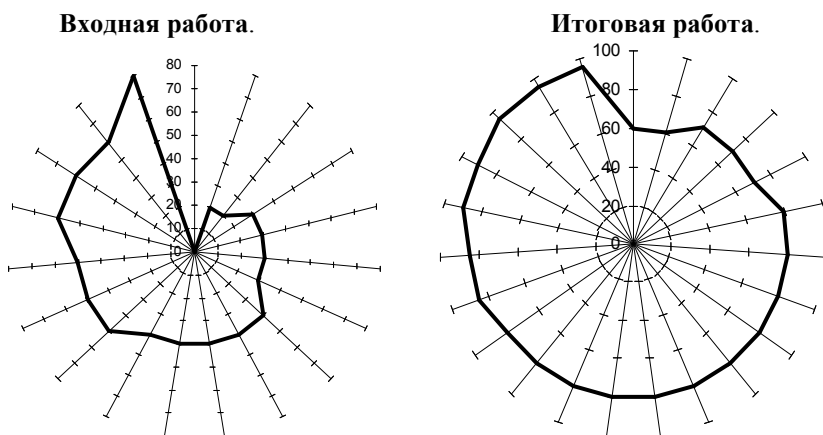


Рис. 1

Поток Б

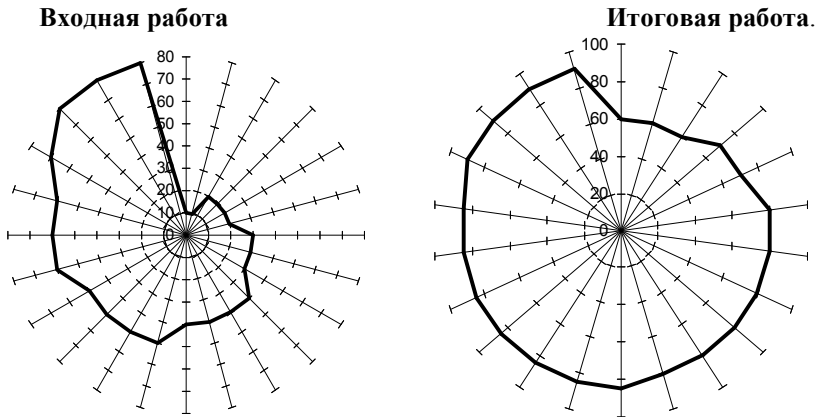


Рис. 2

Как видно из диаграмм, увеличился минимальный балл, и произошло выравнивание в потоках. Выравнивание знаний в потоке – это важное условие для успешного усвоения материала всеми учащимися. Мы надеемся, что это положительно скажется не только на процессе дальнейшего обучения, но и на сохранности контингента обучающихся.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Башкин М.А. Образовательные технологии в самостоятельной работе студентов и курсантов / М.А. Башкин, Н.И. Иванова // Актуальные вопросы современной науки и образования: сборник научных статей по материалам XX международной научно-практической конференции. (Киров, 19–23 апреля 2021 г.). М.: МФЮА, 2021. С. 802–808.
2. Башкин М.А. Об одном подходе к оценке знаний студентов / М.А. Башкин, В.С. Силин // Развитие высшего образования: теория и практика. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. (25 марта 2022 г., Омск). Омск: ОАБИИ, 2022. С. 266–270.

УДК 51.378

А. В. Васильева, Л. В. Березина

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П.А. Соловьева
Россия, г. Рыбинск, e-mail: vasileva@rsatu.ru, berezina_lv@pisem.net

О ПОСТАНОВКЕ И РЕШЕНИИ ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЗАДАЧ

В статье говорится о междисциплинарном характере современной науки. На этом фоне становится важным постановка и решение задач, позволяющих студентам разных направлений подготовки формировать навыки междисциплинарного подхода к решению практико-ориентированных задач. В статье представлены некоторые формулировки и решения таких практико-ориентированных задач. Представленные задачи решены методами векторной алгебры.

Ключевые слова: междисциплинарные связи, практико-ориентированные задачи, математический аппарат, векторная алгебра

A. V. Vasileva, L. V. Berezina

P. A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University
Russia, Rybinsk, e-mail: vasileva@rsatu.ru, berezina_lv@pisem.net

ABOUT STATEMENT AND SOLUTION OF PRACTICE-ORIENTED TASKS

The article discusses the interdisciplinary nature of modern science. In this context, it becomes important to set and solve problems that allow students of different fields to develop interdisciplinary skills for solving practical problems. The article presents some formulations and solutions of such practical problems. These problems are solved using vector algebra methods.

Keywords: interdisciplinary connections, practice-oriented tasks, mathematical apparatus, vector algebra

Сегодня инженерно-техническое образование получает новый импульс в развитии. Меняются реалии инженерной деятельности, растут требования к представителям этой профессии, появляются огромные возможности для технического творчества и воплощения инженерных решений. Меняется и характер современной науки, теперь она становится междисциплинарной. Это проявляется и в использовании методов разных дисциплин.

лин для решения единой задачи, и в работе междисциплинарных команд, где каждый специалист вносит экспертизу из своей области, и в переносе компетенций и терминологии между дисциплинами. Междисциплинарность становится качественной трансформацией современной науки, отвечающей на вызовы XXI века.

На этом фоне междисциплинарные связи математики и физики, математики и технологии – это не просто взаимодействие наук, а единый механизм познания природы, где математический аппарат позволяет формулировать физические законы, описывать течение тех или иных технологических процессов, а физические наблюдения, развитие новых технологических направлений стимулируют развитие математического инструмента для решения прикладных инженерных задач.

В связи с этим появляется необходимость постановки и формулировки различных инженерных задач, позволяющих студентам разных направлений подготовки на практике формировать навыки междисциплинарного подхода к решению практико-ориентированных задач. В РГАТУ имени П.А. Соловьева подготовлен сборник задач, отражающий их междисциплинарный характер. Приведем некоторые практико-ориентированные задачи по теме «Векторная алгебра».

Задача 1. Вычисление параметров движения объектов.

Лодочник должен переплыть реку из пункта A в пункт B , лежащие на одном перпендикуляре. Если лодочник направляет лодку по прямой AB , то через время $t_1 = 10$ мин он попадает в пункт C , лежащий на расстоянии $s = 120$ м по течению ниже, чем пункт B . Если он направит лодку под некоторым углом к прямой AB , то через время $t_2 = 12,5$ мин попадет в пункт B . Считая скорость лодки относительно воды постоянной, определить скорость течения реки, собственную скорость лодки, ширину реки и угол между вектором скорости лодки и прямой AB .

Решение: Введем систему координат, как показано на рис. 1.

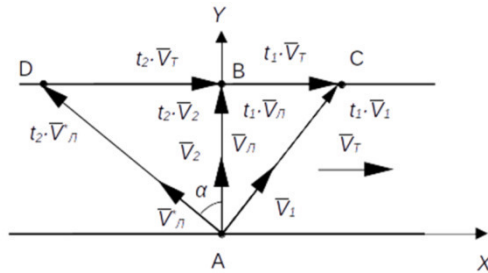


Рис. 1. Схема к решению задачи

Введем следующие обозначения:

V_T – вектор течения реки,

V_L – вектор собственной скорости лодки, когда лодочник направляет лодку по прямой AB ,

V_L^* – вектор собственной скорости лодки, когда лодочник направляет лодку под углом α к прямой AB ,

V_1 – результирующий вектор скорости лодки, когда лодочник направляет лодку по прямой AB ,

V_2 – результирующий вектор скорости лодки, когда лодочник направляет лодку под углом α к прямой AB .

Из рис. 1 видно, что $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.

Вектор перемещения пропорционален вектору скорости, коэффициентом пропорциональности является время. Тогда

$$\overline{AC} = t_1 \cdot \overline{V}_1, \quad |\overline{AC}| = 10 \cdot |\overline{V}_1|, \quad \overline{AB} = t_1 \cdot \overline{V}_L, \quad |\overline{AB}| = 10 \cdot |\overline{V}_L| - \text{ширина реки,}$$

$$\overline{BC} = t_1 \cdot \overline{V}_T, \quad |\overline{BC}| = 10 \cdot |\overline{V}_T|.$$

По условию $|\overline{BC}| = s = 120$ м. Следовательно, $120 = 10 \cdot |\overline{V}_T|$ и $|\overline{V}_T| = 12$ м/мин.

Применяя теорему Пифагора к треугольнику ABC и подставив длины векторов, будем иметь

$$|\overline{AC}|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2, \quad 100 \cdot |\overline{V}_1|^2 = 100 \cdot |\overline{V}_L|^2 + 14400 \quad \text{и} \quad |\overline{V}_1|^2 = |\overline{V}_L|^2 + 144.$$

Аналогично, из рис. 1 видно, что $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB}$.

$$\overline{AB} = t_2 \cdot \overline{V}_2, \quad |\overline{AB}| = 12,5 \cdot |\overline{V}_2|. \quad \text{При этом} \quad |\overline{AB}| = 10 \cdot |\overline{V}_L|.$$

$$\overline{AD} = t_2 \cdot \overline{V}_L, \quad |\overline{AD}| = 12,5 \cdot |\overline{V}_L|, \quad \overline{DB} = t_2 \cdot \overline{V}_T, \quad |\overline{DB}| = 12,5 \cdot |\overline{V}_T|.$$

Применяя теорему Пифагора к треугольнику ABD и подставив длины векторов, будем иметь:

$$|\overline{AD}|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{DB}|^2, \quad 12,5^2 \cdot |\overline{V}_L|^2 = 12,5^2 \cdot |\overline{V}_2|^2 + 12,5^2 \cdot |\overline{V}_T|^2 \quad \text{и} \\ |\overline{V}_L|^2 = |\overline{V}_2|^2 + 144.$$

Из полученных уравнений составим систему

$$\begin{cases} |\overline{V}_1|^2 = |\overline{V}_L|^2 + 144, \\ |\overline{V}_L|^2 = |\overline{V}_2|^2 + 144, \\ 12,5 \cdot |\overline{V}_2| = 10 \cdot |\overline{V}_L|. \end{cases}$$

Ее решение

$$|\vec{V}_2| = \sqrt{256} = 16 \text{ м/мин}, |\vec{V}_Л| = 20 \text{ м/мин} = \frac{20}{60} \text{ м/с} \approx 0,33 \text{ м/с}.$$

$$|\vec{V}_T| = 12 \text{ м/мин} = \frac{12}{60} \text{ м/с} \approx 0,2 \text{ м/с}.$$

Тогда ширина реки: $|\overline{AB}| = 10 \cdot 20 = 200 \text{ м}.$

Угол между вектором скорости лодки и прямой AB найдем из треугольника ABD :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\overline{DB}|}{|\overline{AB}|} = \frac{12,5 |\vec{V}_T|}{12,5 |\vec{V}_2|} = \frac{|\vec{V}_T|}{|\vec{V}_2|} = \frac{12}{16} = 0,75, \alpha = \operatorname{arctg} 0,75 \approx 37^\circ.$$

Ответ: ширина реки 200 м, скорость течения 0,2 м/с, собственная скорость лодки 1/3 м/с, $\alpha = 37^\circ$.

Задача 2. Расчет геометрических параметров деталей в заготовительном производстве.

При изготовлении детали, необходимо спроектировать расположение отверстий по заданной схеме: три отверстия располагаются в вершинах треугольника ABC , стороны которого соответственно равны $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$, четвертое отверстие располагается в середине стороны AB , пятое отверстие делит сторону BC в отношении $m:n$, считая от точки B . Выбрать систему координат и найти координаты всех отверстий в этой системе.

Решение. Построим декартову систему координат. Примем за начало координат точку A , ось абсцисс будет совпадать со стороной AC , ось ординат будет ей перпендикулярна (рис. 2).

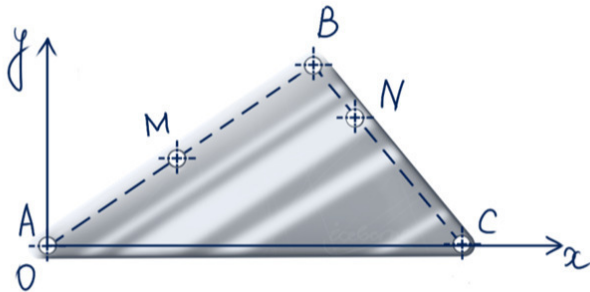


Рис. 2. Выбор системы координат

Координаты точки $A (0;0)$, точки $C (c;0)$. Для нахождения координат точки $B (x_B; y_B)$ рассмотрим систему векторов (рис. 3):

$$\overline{AB} (x_{AB}; y_{AB}) = (x_B - x_A; y_B - y_A) = (x_B - 0; y_B - 0) = (x_B; y_B),$$

$$\overline{BC} (x_{BC}; y_{BC}) = (x_C - x_B; y_C - y_B) = (c - x_B; 0 - y_B) = (c - x_B; -y_B).$$

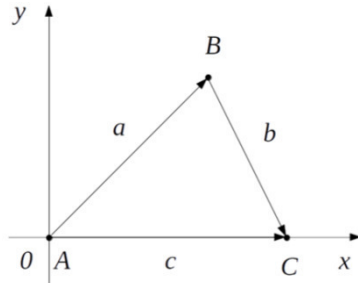


Рис. 3. Система векторов

Найдём длины (модули) векторов:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{x_{AB}^2 + y_{AB}^2} = \sqrt{x_B^2 + y_B^2}, \text{ по условию } |\overline{AB}| = a \ (a > 0).$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{x_{BC}^2 + y_{BC}^2} = \sqrt{(c - x_B)^2 + y_B^2}, \text{ по условию } |\overline{BC}| = b \ (b > 0).$$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x_B^2 + y_B^2} = a, \\ \sqrt{(c - x_B)^2 + y_B^2} = b. \end{cases}$$

Возведём в квадрат обе части каждого уравнения:

$$\begin{cases} x_B^2 + y_B^2 = a^2, \\ (c - x_B)^2 + y_B^2 = b^2. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$x_B^2 - (c - x_B)^2 + y_B^2 - y_B^2 = a^2 - b^2.$$

Выполним алгебраические преобразования:

$$x_B^2 - c^2 + 2 \cdot c \cdot x_B - x_B^2 = a^2 - b^2,$$

$$2 \cdot c \cdot x_B = a^2 - b^2 + c^2, \quad x_B = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2 \cdot c},$$

$$y_B^2 = a^2 - x_B^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2 \cdot c} \right)^2, \quad y_B = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2 \cdot c} \right)^2}.$$

В результате получим координаты точки B (рис. 4)

$$(x_B; y_B) = \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2 \cdot c}; \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2 \cdot c} \right)^2} \right).$$

Координаты вектора \overline{BC} :

$$\begin{aligned} (x_{BC}; y_{BC}) &= \left(c - \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2 \cdot c}; -\sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2 \cdot c} \right)^2} \right) = \\ &= \left(\frac{c^2 - a^2 + b^2}{2 \cdot c}; -\sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2 \cdot c} \right)^2} \right) \end{aligned}$$

Определим положение четвёртого и пятого отверстий.

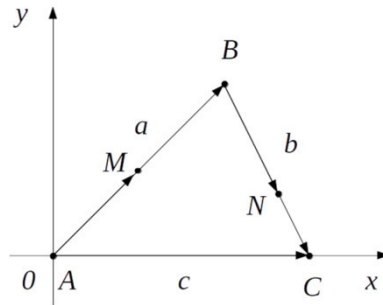


Рис. 4. Схема к определению координат точек

По условию точка N (пятое отверстие) делит сторону BC в отношении $m:n$, считая от точки B , точка M является серединой стороны AB . Следовательно, в векторной форме:

$$\begin{aligned} \overline{BN} &= \frac{m}{m+n} \cdot \overline{BC} = \frac{m}{m+n} \cdot \left(\frac{c^2 - a^2 + b^2}{2 \cdot c}; -\sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2 \cdot c} \right)^2} \right) = \\ &= \left(\frac{m}{m+n} \cdot \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2 \cdot c}; -\frac{m}{m+n} \cdot \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2 \cdot c} \right)^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{AM} &= \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2} \cdot (x_B; y_B) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2 \cdot c}; \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2 \cdot c} \right)^2} \right) = \\ &= \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{4 \cdot c}; \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2 \cdot c} \right)^2} \right). \end{aligned}$$

Координаты точки N:

$$\overline{BN} = (x_N - x_B; y_N - y_B) \Rightarrow x_N = x_{BN} + x_B, \quad y_N = y_{BN} + y_B.$$

Координаты точки B :

$$(x_B; y_B) = \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2 \cdot c}; \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2 \cdot c} \right)^2} \right),$$

$$x_N = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2 \cdot c} + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2 \cdot c},$$

$$y_N = \left(1 - \frac{m}{m+n} \right) \cdot \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2 \cdot c} \right)^2} = \frac{n}{m+n} \cdot \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2 \cdot c} \right)^2}.$$

Координаты точки M:

$$\overline{AM} = (x_M - x_A; y_M - y_A) \Rightarrow x_M = x_{AM} + x_A = x_{AM} + 0 = x_{AM},$$

$$y_M = y_{AM} + y_A = y_{AM} + 0 = y_{AM}.$$

$$x_M = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{4 \cdot c}, \quad y_M = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2 \cdot c} \right)^2}.$$

Задача 3. Расчет параметров магнитного поля электродвигателя.

В асинхронном электродвигателе необходимо рассчитать параметры магнитного поля. Известно, что вектор магнитного поля статора \vec{F}_s имеет модуль 120 А и направлен под углом 30° к оси ротора; вектор магнитного поля ротора \vec{F}_r имеет модуль 80 А и направлен под углом 150° к оси ротора. Необходимо: найти результирующий вектор магнитного поля; построить векторную диаграмму магнитного поля; найти крутящий момент электродвигателя (радиус ротора 0,1 м).

Решение: Введем декартову систему координат: ось абсцисс совпадает с осью ротора, ось ординат ей перпендикулярна. Координатами векторов будут являться их проекции на координатные оси (рис. 5).

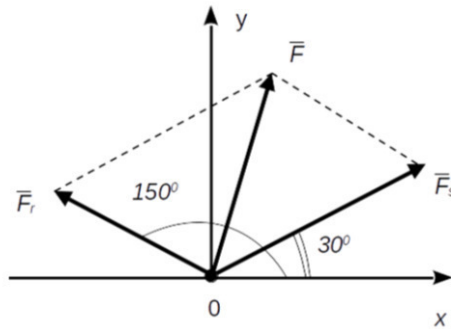


Рис. 5. Схема к решению задачи 3

Найдем координаты вектора магнитного поля статора:

$$|\vec{F}_s| = 120 \text{ A}, \alpha = 30^\circ.$$

$$|\vec{F}_s|_x = |\vec{F}_s| \cdot \cos \alpha = 120 \cdot \cos 30^\circ = 120 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 103,9 \text{ A}.$$

$$|\vec{F}_s|_y = |\vec{F}_s| \cdot \sin \alpha = 120 \cdot \sin 30^\circ = 120 \cdot \frac{1}{2} = 60,0 \text{ A}.$$

$$\vec{F}_s = 103,9 \cdot \vec{i} + 60,0 \cdot \vec{j}$$

Найдем координаты вектора магнитного поля ротора:

$$|\vec{F}_r| = 80 \text{ A}, \beta = 150^\circ.$$

$$|\vec{F}_r|_x = |\vec{F}_r| \cdot \cos \alpha = 80 \cdot \cos 150^\circ = 80 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx -69,3 \text{ A}.$$

$$|\vec{F}_r|_y = |\vec{F}_r| \cdot \sin \alpha = 80 \cdot \sin 150^\circ = 80 \cdot \frac{1}{2} = 40,0 \text{ A}.$$

$$\vec{F}_r = -69,3 \cdot \vec{i} + 40,0 \cdot \vec{j}.$$

Найдем координаты результирующего вектора силы магнитного поля:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_s + \vec{F}_r = 103,9 \cdot \vec{i} + 60,0 \cdot \vec{j} + (-69,3 \cdot \vec{i} + 40,0 \cdot \vec{j}) = \\ &= (103,9 - 69,3) \cdot \vec{i} + (60,0 + 40,0) \cdot \vec{j} = \\ &= 34,6 \cdot \vec{i} + 100,0 \cdot \vec{j} \end{aligned}$$

Модуль результирующей силы:

$$|\vec{F}| = \sqrt{34,6^2 + 100,0^2} = \sqrt{1197,16 + 10000,00} = \sqrt{11197,16} \approx 105,8 \text{ А.}$$

Угол отклонения результирующей силы от оси ротора:

$$\varphi = \beta - \alpha = 150^0 - 30^0 = 120^0.$$

Для нахождения вектора крутящего момента, нужно найти векторное произведение вектора силы магнитного поля на радиус-вектор ротора:

$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}$. Модуль вектора крутящего момента:

$$|\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin\varphi = 105,8 \cdot 0,1 \cdot \sin 120^0 = 10,58 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 9,2 \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сафронов А.М.* Линейная алгебра. Аналитическая геометрия (теория и практика): учебное пособие. 2-е изд., перераб. и доп. Рыбинск: РГАТА, 2005. 179 с.

УДК 51:378

А. В. Васильева, Л. В. Березина, Е. В. Олейникова

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П.А. Соловьева
Россия, г. Рыбинск, e-mail: vasileva@rsatu.ru, berezina_lv@pisem.net,
leona73@yandex.ru

О РАБОТЕ С ЦИФРОВОЙ ЛАБОРАТОРИЕЙ ПО МАТЕМАТИКЕ

В статье рассмотрены возможности применения цифровых лабораторий для изучения математики. Занятия по математике с применением цифровых лабораторий проводились в рамках Федерального проекта Министерства науки и высшего образования по подготовке инженеров нового поколения «Передовые инженерные школы». В статье описаны основные принципы работы цифровых лабораторий, представлены методические рекомендации по проведению цифровых лабораторных работ, рассмотрен пример организации и проведения цифровой лабораторной работы.

Ключевые слова: инженерное образование, цифровые лаборатории, математическое моделирование, функции одного переменного

A. V. Vasileva, L. V. Berezina, E. V. Oleynikova

P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University
Russia, Rybinsk, e-mail: vasileva@rsatu.ru, berezina_lv@pisem.net,
leona73@yandex.ru

ABOUT WORKING WITH A DIGITAL LABORATORY IN MATHEMATICS

The article discusses the possibilities of using digital laboratories for studying mathematics. Mathematics classes using digital laboratories were held as part of the Federal project of the Ministry of Science and Higher Education to train the next generation of engineers, "Advanced Engineering Schools". The article describes the basic principles of digital laboratories, provides guidelines for conducting digital laboratory work, and provides an example of organizing and conducting digital laboratory work systems.

Keywords: engineering education, digital laboratories, mathematical modeling, and single-variable functions

В настоящее время профессия инженера выходит на передний план. Одним из проектов по подготовке инженеров нового поколения является

Федеральный проект Министерства науки и высшего образования «Передовые инженерные школы». Сегодня инженерные школы работают на базе 50 российских университетов, в том числе и в РГАТУ им. П.А. Соловьева. Основная задача передовых инженерных школ – помочь школьникам проявить и развить интерес к инженерным специальностям, получить более глубокие знания, в том числе и по математике.

В рамках работы передовой инженерной школы для учащихся города Рыбинска на базе РГАТУ имени П.А. Соловьева были организованы занятия с цифровой лабораторией по математике. Участники этого проекта познакомились с работой цифровых лабораторий, разбирались с основами математического аппарата, который может применяться для описания тех или иных физических процессов. Учащиеся в течении года изучали такие разделы математики, как функции одного переменного, статистические методы обработки и анализа экспериментальных данных, основы математического моделирования.

Цифровая лаборатория по математике представляет собой набор инструментов, а именно: датчиков сигналов, индикаторов, различных приспособлений, сопротивлений разного номинала, соединительных кабелей и программное обеспечение. Этот инструментарий позволяет построить различные физические эксперименты по изучению зависимостей одних величин (выходные параметры) от других (входные параметры). Данные о значении измеряемой величины, с помощью соответствующих датчиков, фиксируются и далее передаются в компьютер, для обработки в специальной программе.

Преимущества работы с такими цифровыми лабораториями очевидны: происходит автоматический сбор данных, специальная программа обрабатывает эти данные и формирует таблицы, что очень удобно для дальнейшего анализа и изучения параметров процесса. Кроме того, эксперименты можно проводить несколько раз, результаты предыдущих экспериментов сохраняются и используются при необходимости. Также цифровая лаборатория позволяет фиксировать величины в динамике, что тяжело сделать вручную. Появляется возможность отследить меняющиеся параметры во времени. После формирования в специальной программе таблиц с выходными и входными характеристиками эти данные можно перенести в любую цифровую среду для дальнейшего описания и анализа.

Для проведения занятий была разработана специальная методика проведения лабораторных работ. Занятия были разбиты на три тематических блока. В основе градации лежали виды функций (математических моделей), которые строятся на основе обработки экспериментальных данных и изучаются по мере проведения лабораторной работы. Ученики начали свое знакомство в первом блоке с линейной функции или прямой

пропорциональности, второй блок – обратная пропорциональность, третий блок – квадратичная зависимость. Занятия проводились по общей схеме:

1. Знакомство с математическим моделированием. Изучение функции одного переменного.
2. Эксперимент. Сбор установки, регистрация данных.
3. Обработка данных. Экспериментальные точки, обработка данных в таблицах.
4. Постановка математической модели. Поиск неизвестных параметров модели, вычисление расчетных значений, проверка правильности построения модели.

Рассмотрим лабораторную работу первого тематического блока - построение и изучение линейной функции. В данной лабораторной работе исследовалась зависимость напряжения от силы тока в электрической цепи.

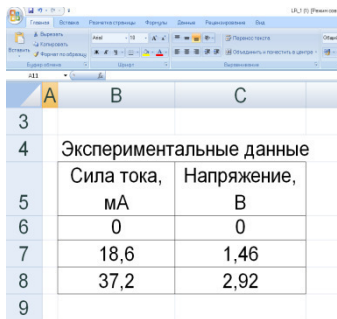
Как известно из физики, эта зависимость имеет вид

$$U = R \cdot I, \tag{1}$$

где U – напряжение, В; I – сила тока, А; R – сопротивление, Ом.

С использованием инструментария цифровой лаборатории был построен эксперимент по определению силы тока в цепи. В цепь последовательно соединялись: сопротивление номиналом 82 Ом, источник тока и датчик, позволяющий регистрировать силу тока. Далее электрическую цепь пересобрали, подключив датчик напряжения, который регистрировал значения напряжений при соответствующих значениях силы тока. Все данные регистрируются и обрабатываются в специальной программе, а затем загружаются в пакет Excel для дальнейшего анализа.

В результате выполнения экспериментальной части лабораторной работы, были получены экспериментальные точки, собранные в таблицу (рис. 1) и построено корреляционное поле (рис. 2).



	Сила тока, мА	Напряжение, В
0	0	0
18,6	1,46	
37,2	2,92	

Рис. 1. Результаты измерений

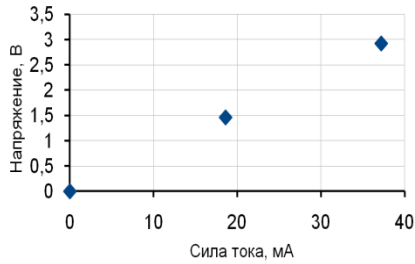


Рис. 2. Экспериментальные точки

Найдем неизвестный коэффициент R в (1) по методу наименьших квадратов [1]:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n x_i}.$$

Для полученных $n = 3$ экспериментальных точек $R = 0,078$. Таким образом, функциональная связь (математическая модель) зависимости напряжения от силы тока имеет следующий вид: $y = 0,078 \cdot x$.

Далее по полученной математической модели были вычислены расчетные значения функции $U_{\text{расч}}$ и построена линия на плоскости (рис. 3).

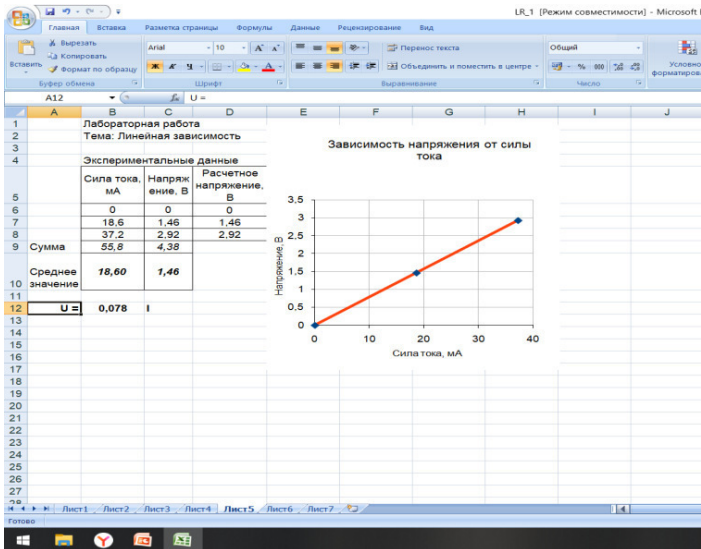


Рис. 3. Расчет и построение математической модели

К сожалению, ресурсы цифровой лаборатории в данной работе ограничены четырьмя экспериментальными точками. Четвертую точку применяли для проверки правильности построения модели. Для этого вычислили сначала расчетное значение функции, а затем поставили повторный эксперимент и определили экспериментальное значение функции. Результаты представлены на рис. 4.

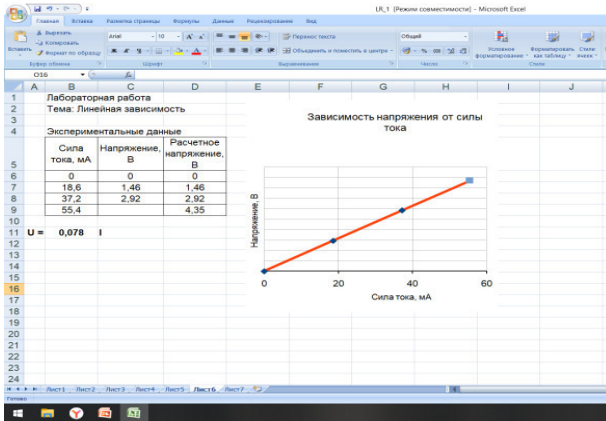


Рис. 4. Проверка правильности построения модели

Таким образом, при работе с цифровой лабораторией, есть возможность получить наглядное представление о математическом моделировании и построении простейших математических моделей. Изучить виды функций, элементы поведения, построение графиков этих функций. Познакомиться с оценкой погрешностей (при выполнении лабораторных работ следующих тематических блоков). Возможности цифровых лабораторий не ограничены построением степенных функций, так же доступно изучение показательных, логарифмических и тригонометрических зависимостей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ведение в математическое моделирование: учебно-методическое пособие Б.А. Вороненко, А.Г. Крысин, В.В. Пеленко, О.А. Цуранов. СПб.: НИУ ИТМО, 2014. 44 с.
2. *Полещук О.М.* Введение в математический анализ. Элементарные функции. Исследование поведения функций: Учебное пособие для самостоятельной работы студентов / О.М. Полещук, С.В.Тумор. Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2024.

УДК 51:378

А. В. Васильева, А. Е. Иванова, Р. О. Житков

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П.А. Соловьева

Россия, г. Рыбинск, e-mail: vasileva@rsatu.ru, annie2ko@yandex.ru,
zhitkovro@yandex.ru

О РАЗРАБОТКЕ ЧАТ-БОТА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

В статье говорится о разработке чат-бота по теории вероятностей и математической статистике. Чат-бот написан на языке программирования Python, что связано с его распространенностью и наличием достаточного количества необходимых библиотек для интеграции с мессенджерами, в среде разработки PyCharm, IDLE и с использованием облачной платформы для хостинга IT-проектов GitHub. В основе кода лежит библиотека telebot. В статье представлена блок-схема и приведено описание работы чат-бота.

Ключевые слова: чат-бот, теория вероятностей и математическая статистика, блок-схема, язык программирования

A. V. Vasileva, A. E. Ivanova, R. O. Zhitkov

P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University
Russia, Rybinsk, e-mail: vasileva@rsatu.ru, annie2ko@yandex.ru,
zhitkovro@yandex.ru

ABOUT DEVELOPMENT OF A CHAT-BOT ON THE THEORY OF PROBABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS

The article discusses the development of a chatbot based on probability theory and mathematical statistics. The chatbot is written in the Python programming language, which is widely used and has a sufficient number of necessary libraries for integration with messaging apps, using the PyCharm development environment, IDLE, and the GitHub cloud platform for hosting IT projects. The code is based on the telebot library. The article provides a flowchart and a description of how the chatbot works.

Keywords: chatbot, probability theory and mathematical statistics, flowchart, programming language

В современном мире все большее развитие получает обучение с применением различных интерактивных технологий, в том числе и с использованием чат-ботов. Данные технологии обладают огромным потен-

циалом и создают дополнительные возможности, как для освоения теоретических основ, так и для получения практических навыков при решении задач или в процессе выполнения лабораторных работ. Чат-бот позволяет создать уникальные условия для обучения в безопасной среде, интеграция онлайн-платформ и образовательных ресурсов делает образование более еще более доступным, позволяя студентам учиться в удобное для них время [1]. Это особенно актуально для студентов заочной и дистанционной формы обучения.

В рамках проекта, направленного на повышение качества преподавания фундаментальных дисциплин, был разработан чат-бот, помогающий в освоении дисциплин курса высшей математики [2], и далее чат-бот по «Теории вероятностей и математической статистике» [3]. В разработке принимали участие студенты первого курса РГАТУ им. П.А. Соловьева.

Чат-бот по теории вероятностей и математической статистике был написан на языке программирования Python, что связано с его распространенностью и наличием достаточного количества необходимых библиотек для интеграции с мессенджерами, в среде разработки PyCharm, IDLE и с использованием облачной платформы для хостинга IT-проектов GitHub. В основе кода лежит библиотека telebot [4].

Блок-схема работы чат-бота представлена на рис. 1.



Рис. 1. Блок-схема работы чат-бота

Работа чат-бота была организована следующим образом.

Вход для работы с чат-ботом возможен по ссылке или QR-коду.

После нажатия на кнопку «Старт», чат-бот предоставляет возможность выбрать роль: «Студент» или «Преподаватель».

При выборе роли «Студент» необходимо пройти краткую регистрацию – написать шифр учебной группы в указанном формате, ввести ФИО.

После входа под ролью «Студент» открываются основные разделы:

теоретический материал по теме;
практические задачи для решения;
лабораторные работы (выполнение практического задания с помощью различных вычислительных программ).

Возможность выхода из чат-бота или возврат на главную страницу организована на каждом этапе работы чат-бота.

В разделе, содержащем *теоретический материал*, возможен выбор темы по теории вероятностей и математической статистике. Там содержится:

основной теоретический материал;
гlossарий;
список вопросов для проверки знаний и самоподготовки.

Материалы доступны в виде pdf-файла и (или) отрываются в текущем окне.

В подразделе «Вопросы» работа организована следующим образом: бот по запросу выбирает в случайном порядке вопрос (выбор картинки с вопросом) и к нему варианты ответа. После ответа на последний вопрос, можно ознакомиться с текущими результатами.

В этом разделе также можно ознакомиться с рекомендациями по выбору соответствующей литературы.

В разделе, содержащем *практические задания*, организована работа двух подразделов:

«Задачи» – чат-бот присылает файл в формате pdf с подробно разобранными типовыми заданиями, основными приемами и практическими рекомендациями по решению задач данной тематики. Здесь также содержатся задачи для самостоятельного решения.

«Тест» – в этом подразделе можно проверить свои практические знания. Бот присылает картинки с задачами и выбором варианта ответа из базы задач в случайном порядке. После решения последнего задания, можно ознакомиться с текущими результатами.

В разделе, посвященном выполнению *лабораторных работ*, содержится:

основной теоретический материал к лабораторной работе – план выполнения лабораторной работы, шаблоны, в которых выполняется и оформляется лабораторная работа, требования к выполнению и прочее;

задания к лабораторным работам по вариантам;

ссылка на специализированную программу, в которой необходимо выполнить задание.

В чат-боте организована генерация входных данных. Это требуется для выполнения лабораторных работ по математической статистике. Когда пользователь запрашивает входные данные для выполнения лабораторной

работы, чат-бот создаёт файл Excel в виде таблицы данных. Сгенерированные данные носят практико-ориентированный характер, отражают смысл задачи и отвечают некоторым требованиям:

- числа генерируются по закону нормального распределения;
- разброс данных является контролируемым – большинство значений близко к среднему, некоторые отклоняются от него;
- все числа находятся в реалистичном диапазоне; данные представлены с точностью до трёх знаков после запятой.

В итоге пользователь имеет таблицу из 100 измерений с естественным разбросом, но без грубых ошибок.

При выборе роли «Преподаватель» необходимо ввести уникальный ключ доступа в личный кабинет (по умолчанию «0000») и ввести ФИО. Здесь можно посмотреть список студентов, зарегистрированных в чат-боте, а также их успеваемость, т.е. балл, на который прошел тест тот или иной студент по данной теме и выбранному разделу (теория, практика, лабораторные работы).

Результаты работы представлены на Всероссийской научно-практической конференции с международным участием [5]. Получены свидетельства о регистрации программ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кузнецов В.В.* Перспективы развития и использования чат-ботов в образовании // *Успехи современной науки*, 2016 Т.8, № 12 С. 16–19.
2. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2025661751. Чат-бот по высшей математике: № 2025619910; заявл. 24.04.2025; опубл. 13.05.2025 / Васильева А.В., Житков Р.О., Иванова А.Е.
3. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2025682893. Чат-бот по теории вероятностей и математической статистике: № 2025681749; заявл. 15.07.2025; опубл. 28.08.2025 / Васильева А. В., Иванова А. Е., Житков Р. О.
4. *Саммерфельд М.* Программирование на Python 3. Подробное руководство: пер. с англ. СПб.: Символ-Плюс, 2009.
5. *Жидков Р.О.* О разработке чат-бота, как помощника к освоению математических дисциплин / Р.О. Жидков, А.Е. Иванова, А.В. Васильева // *Россия молодая: Сборник материалов XVII Всерос. научно-практической конференции с международным участием. 22-25 апр. 2025 г., Кемерово [Электронный ресурс] / ФГБОУ ВО «Кузбас. гос. техн. ун-т им. Т. Ф. Горбачева»; редкол.: К. С. Костиков (отв. ред.) [и др.]. Кемерово, 2025. 1 электрон. опт. диск. С. 31326.1-31326.4*

УДК 51:372.851

О. М. Горина

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина
Россия, г. Рязань, e-mail: olya.gorina.01@gmail.com

О РАЗВИТИИ МОТИВАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ У УЧАЩИХСЯ

В статье исследуются психолого-педагогические основы формирования и поддержания учебной мотивации к изучению математики у школьников. Представлены основные факторы снижения мотивации, систематизированы эффективные методы и приёмы её развития, обоснована необходимость комплексного подхода к стимулированию познавательного интереса.

Ключевые слова: мотивация, математическое образование, математика, познавательный интерес, педагогические приёмы, образовательные технологии

O. M. Gorina

*S.A. Yesenin Ryazan State University
Russia, Ryazan, e-mail: olya.gorina.01@gmail.com*

ON THE DEVELOPMENT OF MOTIVATION TO STUDY MATHEMATICS AT STUDENTS

The article examines the psychological and pedagogical foundations of the formation and maintenance of educational motivation to study mathematics in schoolchildren. The main factors of motivation reduction are presented, effective methods and techniques of its development are systematized, and the need for an integrated approach to stimulating cognitive interest is substantiated.

Keywords: motivation, mathematical education, mathematics, cognitive interest, pedagogical techniques, educational technologies

31 августа 2023 г. вышел приказ Министерства просвещения РФ № 650 “Об утверждении Порядка осуществления мероприятий по профессиональной ориентации обучающихся по образовательным программам основного общего и среднего общего образования?”. С 1 сентября 2023 года в школьной программе появилась обязательная профориентация. Регламент профориентации содержится в Письме Минпросвещения России от 03.04.2023 № ДГ-617/05. Цель школьной профориентации – помочь учащимся понять свои интересы, желания и сильные стороны характера.

Осознанно выбрать будущую профессию, учитывая тенденции на современном рынке труда и составить образовательный трек. В проведении мероприятий участвуют в значительной мере партнеры – юридические лица, осуществляющие ресурсную поддержку: компании-работодатели, профессиональные образовательные организации и образовательные организации высшего образования, органы власти и иные организации. Вводится единая модель «билет в будущее», чтобы школы проводили мероприятия по общему стандарту. Уроки и внеклассные мероприятия проводятся с 6-го по 11-й класс, время проведения мероприятий рекомендовано установить по четвергам последним уроком [1]. Таким образом, профориентационные мероприятия вузов, направленные на привлечение молодёжи в свои учебные заведения, становятся составной частью образовательной программы школьников.

Проблема мотивации к изучению математики остаётся одной из наиболее актуальных в современной педагогике. Поскольку математика как учебный предмет обладает некоторыми специфическими особенностями: высокой степенью абстрактных понятий, строгой логической структурой изложения, характером усвоения знаний, так каждая новая тема опирается на предыдущие знания. Все эти особенности создают особые требования к организации мотивационного компонента обучения. Особенно этот вопрос актуален для учащихся 5-6-х классов, ведь именно тогда происходит переход от арифметики к более абстрактным математическим понятиям. Также нельзя не отметить, что в этом возрасте увеличивается количество предметов, объем и сложность учебного материала. Согласно диагностическим исследованиям, уровень положительной мотивации к изучению математики у учащихся 5-6-х классов существенно выше, чем у школьников 7-8-х классов [2]. Это обуславливает необходимость целенаправленной работы по сохранению и усилению познавательного интереса именно на этом этапе обучения.

Цель данной работы – выявить и структурировать эффективные пути формирования устойчивой мотивации к изучению математики у обучающихся 5-6 классов.

Одним из ключевых периодов в образовательном процессе являются именно 5-6 классы. Поскольку в этот период у детей формируется отношение к учебному предмету, закладываются основы для дальнейшего изучения более сложных математических концепций. В этом возрасте дети становятся более осознанными и способными к самоанализу, учителю важно не просто передать знания, но и создать такую образовательную среду, которая будет способствовать развитию внутренней мотивации у учеников.

Мотивация – важнейший компонент структуры учебного процесса. Согласно современным психолого-педагогическим концепциям [3], мотивация представляет собой систему внутренних и внешних стимулов, побуждающих ребёнка к учебной деятельности. В контексте математического образования можно выделить следующие виды мотивации:

1. Внутренняя – интерес к самому процессу познания, удовольствие от решения задач;
2. Внешняя – стремление получить оценку, избежать наказания, соответствовать ожиданиям родителей, учителя и друзей;
3. Познавательная – интерес к содержанию предмета, желание понять сущность математических закономерностей;
4. Социально-значимая – осознание важности математических навыков для профессиональной деятельности.

Для учащихся 5-6-х классов наиболее значимы познавательная и внешняя мотивации. Это определяет выбор педагогических стратегий.

Нельзя оставить без внимания факторы, которые влияют на снижение мотивации у школьников:

1. Увеличение абстрактности материала – переход от конкретных арифметических действий, которые можно наглядно представить при помощи счётных материалов, к алгебраическим понятиям;
2. Рост учебной нагрузки, увеличение количества предметов;
3. Недостаточная связь с жизненным опытом – многие школьники не видят практического применения математики и воспринимают её как отвлечённую науку;
4. Страх ошибок – боязнь неправильных ответов, негативных комментариев и оценок;
5. Давление со стороны родителей, сравнение с более успешными одноклассниками;
6. Однообразии форм работы – однообразные методы обучения;
7. Пробелы в базовых знаниях начальной школы.

Можно пойти методом «от противного» и повышать мотивацию детей, устраняя негативное воздействие. Давайте рассмотрим проблемы по отдельности и найдём к ним решение.

В первую очередь рассмотрим проблему перехода от арифметики к абстрактным понятиям алгебры. Первой «абстрактностью» в курсе математики являются буквенные выражения. Чтобы объяснить своим учащимся, откуда в математике среди чисел появились буквы, я играю с ними в небольшую игру:

- Загадай число, но мне не говори.
- Загадал.

- Молодец. Ты можешь записать это число в тетрадку, потому что ты его знаешь. Но как же записать твоё число мне? Мне придётся писать

длинное словосочетание «загаданное число». А если попросить нескольких одноклассников загадать число, тогда придётся писать ещё больше. Например, «Загаданное число Миши», «Загаданное число Кати» и так далее. Запись получается очень длинная и неудобная. Гораздо удобнее использовать специальное обозначение: рисунок или символ. Рисовать тоже довольно долго, поэтому математики решили, что в таких случаях будут использовать буквы.

Поэтому я прошу ребят загадывать разные числа и обозначаю их на доске. Поскольку дети вовлечены в загадки, то они понимают саму суть, а не просто заучивают определение. После ознакомления с сутью буквенных выражений можно использовать примеры-рисунки. В презентации я показываю ребятам буквенное выражение, но переменную заменяю на рисунок коробки или сундука. В зависимости от того, какое число дети «положат» в коробку, будет меняться результат вычислений. В качестве домашнего задания можно попросить детей самостоятельно придумать несколько таких буквенных выражений с использованием рисунков вместо переменной.

Так же ребятам нравятся мини-проекты, которые можно успеть выполнить за один урок. Школьники видят практическое применение и связь с жизнью. Во многих случаях я предлагаю детям самостоятельно выбрать данные для мини-исследования. Например, при изучении процентов можно зайти на маркет-плейс и посчитать, какая стоимость товара будет в «Чёрную пятницу»; или при изучении столбчатых и круговых диаграмм прошу ребят изучить свой рацион, посчитать КБЖУ (данные о КБЖУ в разных продуктах дети смотрят в интернете) и на основе этих данных построить диаграмму своего питания.

Школьникам нравится, когда уроки проходят не традиционно, а с использованием игр, викторин и прочих активных методов [4]. Также можно проводить тематические уроки. Например, открыть календарь праздников и черпать идеи оттуда: Хеллуин, Новый год, День всех влюблённых. В своей работе я использую тематическое оформление презентаций и рабочих листов. В презентацию можно добавить персонажа, который будет вместе с учителем задавать проблемную ситуацию, ставить вопросы и помогать обучающимся выполнять задачи. Например, можно использовать на уроке персонажей Диппера и Мейбл, обучающимся нужно будет помочь Дипперу с изучением нового материала и Мейбл с решением задач. Такой незначительный элемент добавляет в урок игровой компонент.

Из многих теорий мотивации, которые могут быть применены к образовательному процессу, давайте рассмотрим теорию самоопределения. Эта теория утверждает, что для достижения высокой степени внутренней

мотивации необходимо удовлетворение трёх потребностей: автономии, компетентности и связанности. То есть учащиеся должны чувствовать, что у них есть возможность выбора, что они способны справляться с поставленными задачами и что они находятся в дружелюбной атмосфере [5]. Для удовлетворения этих потребностей можно использовать метод «Ромашки» или устраивать «Лотерею упражнений».

Структурируем методы и приёмы развития мотивации:

1. Связь с реальной жизнью: задачи с бытовым сюжетом, практические ситуации;

2. Игровые технологии: математические бои, викторины, игры-квесты, рисование в системе координат, морской бой в системе координат, тематические уроки;

3. Проектная деятельность: составление собственных задач, рассчитать стоимость подарка, семейный бюджет, распорядок дня. Мини-проект можно провести на многие темы математики. Главный вопрос, который мне помогает придумать идею, «А как я могу применить эту тему в жизни?»;

4. Информационно-коммуникационные технологии: интерактивные тренажёры, тематические презентации, рабочие листы, использование платформ ГеоГебра и LearningApps;

5. Благоприятная атмосфера: акцент на успехах, а не ошибках; система поощрений за активность на уроках; рефлексия и позитивная обратная связь.

В заключение следует отметить, что развитие мотивации к изучению математики – многогранный процесс, требующий системного подхода. Реализация предложенных идей позволит сформировать у школьников не только внутреннюю мотивацию к освоению математики, но и в общем, что наиболее важно, поднять уровень познавательного интереса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Письмо Минпросвещения РФ от 03.04.2023 № ДГ-617/05. URL: <https://normativ.kontur.ru/document?moduleId=8&documentId=449373> (дата обращения 17.01.2026)
2. *Маркова А.К.* Формирование мотивации учения в школьном возрасте. М.: Просвещение, 1983. 28 с.
3. *Фридман Л.М.* Психолого-педагогические основы обучения математике. М.: МЦНМО, 2007. С. 4-6.
4. *Сапогов В.Р.* Об использовании элементов теории игр в профорientационной работе // Математика и естественные науки. Теория и практика. Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 21. Ярославль, Изд-во ЯГТУ. 2026. С. 112-116.
5. *Якиманская И.С.* Личностно-ориентированное обучение в современной школе. М.: Сентябрь, 2007. С. 33-45.

УДК 51:373.016:378.016

Л. В. Жовтан

ФГБОУ ВО «Луганский государственный педагогический университет»
Россия, г. Луганск, e-mail: ludmila_zh@mail.ru

ШКОЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА, РЕАЛИИ И ПЕРСПЕКТИВЫ: ВЗГЛЯД С ПОЗИЦИИ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ

Статья посвящена одной из важнейших проблем математического образования – повышению его качества. Выявлено, что, несмотря на глубокие исторические корни проблемы, до сих пор нет единого мнения по поводу причин падения качества математического образования и, соответственно, путей решения данной проблемы. На примере вузовской дисциплины «Элементарная математика» обосновано, что, ввиду преемственности между школьной и вузовской математикой, без кардинального пересмотра программы и учебников по математике в школе невозможно добиться повышения качества подготовки учащихся по математике, а следовательно, качественных изменений в высшей школе.

Ключевые слова: математическое образование, падение качества, школьная математика, преемственность, программа по математике

L. V. Zhovtan

Lugansk State Pedagogical University
Russia, Lugansk, e-mail: ludmila_zh@mail.ru

SCHOOL MATHEMATICS, REALITIES AND PROSPECTS: A VIEW FROM THE PERSPECTIVE OF HIGHER SCHOOL

The article is devoted to one of the most important problems of mathematical education – improving its quality. It is revealed that, despite the deep historical roots of the problem, there is still no consensus on the reasons for the decline in the quality of mathematical education and, accordingly, the ways to solve this problem. On the example of the university discipline "Elementary Mathematics", it is substantiated that, due to the continuity between school and university mathematics, without a radical revision of the program and textbooks in mathematics at school, it is impossible to improve the quality of students' training in mathematics, and, consequently, qualitative changes in higher education.

Keywords: mathematics education, decline in the quality, school mathematics, continuity, program on mathematics

В российском обществе давно ощущается неудовлетворенность качеством отечественного математического образования на всех уровнях.

Проблема его снижения в школе и, как следствие, в вузе, является предметом исследования многих ученых и практиков. При этом, на основании анализа сложившейся ситуации, осуществляются попытки поиска причин данного тренда.

Бесспорно, значительный вклад в решение проблемы внес И.П. Костенко [5]. В подготовленной им монографии для поиска коренных причин падения качества математического образования была детально прослежена история образования (советского, а затем российского), начиная с 1918 г. и заканчивая настоящим временем. В связи с этим, ученым были выделены три реперные точки падения образования (в том числе и математического):

1956 г. – нарушение главного условия формирования качественных знаний – систематической самостоятельной работы учащихся с книгой;

1978 г. – «слом» традиционной, выверенной временем системы обучения и, как следствие, формализм, то есть обесмысленность знаний, отсутствие навыков, слабая логика (по формулировке академика Л.С. Понтрягина, «огромная общегосударственная диверсия»);

1991 г. – привнесение в школу идеи свободы личности, «освободившей» учащихся от ответственности и желания учиться.

По мнению И.П. Костенко, формализм, «псевдонаучность обучения» под прикрытием научности способствовали искоренению из школьных учебников педагогики и методики, привели к массовому снижению у обучающихся мотивации к учебе, а также спровоцировали ложь на государственном уровне («процентоманию») и запустили в сфере образования прогрессирующую коррупцию. В преподавании математики из учебного процесса были извлечены учебники А.П. Киселева, что, наряду с действиями, последующими в результате «колмогоровской реформы», привело к обвальному падению знаний школьников.

При изучении данной проблемы выдвигаются различные причины. Так, например, ученые из Калининградского областного института развития образования [9] следующие причины снижения качества математического образования:

– слабая преемственность между уровнями образования – основной и средней школой: учителя средней школы недостаточно берут во внимание и учитывают в своей работе результаты сдачи ГИА в 9-х классах;

– недостаточное развитие у школьников вычислительной и графической культуры, пространственного мышления, неумение реализовывать полученные знания для решения практико-ориентированных задач. Все это исследователи объясняют использованием учебников математики, которые содержат недостаточное количество учебных задач с геометрическим содержанием и обучающих исследовательских заданий и в которых

крайне мало задач прикладной направленности и задач «реальной» математики;

– преобладание в кадровом составе школ педагогов старше 40 лет, в том числе и пенсионного возраста, и, как следствие, возникновение проблем, связанных с внедрением новейших, в том числе информационных, технологий, а также «синдрома сторания»;

– высокая нагрузка учителей (превышение оптимальной нормы).

Математик, старший научный сотрудник Института проблем передачи информации РАН А.Х. Шень [10] одной из значимых причин такого падения называет низкое «локальное качество» учебников. Ученый считает, что учебники должны писать профессиональные математики, имеющие многолетний опыт преподавания, причем не в специальных математических классах, а в «массовой школе» (в качестве антипримера приводятся учебники А.Н. Колмогорова).

По мнению Г.Е. Сенькиной [8], анализ результатов базового ЕГЭ по математике свидетельствует о том, что выборка задач содержательно изменилась, – как правило, это задачи на практическую сметку, что не требует знаний математики как таковой. Ученый утверждает, что имеет место чрезмерная дифференциация математической подготовки обучающихся («сильные становятся сильнее, слабые – слабее»), что не только не ведет к поднятию престижа математического образования, а напротив, способствует падению его качества.

Среди иных причин данного процесса в научных публикациях называются следующие:

– ограниченное количество времени (урок длится всего 45 минут);

– в условиях инклюзивного образования учителю приходится осуществлять обучение одновременно по нескольким программам, что создает определенные сложности;

– несоответствие программы требованиям аттестации (школьная программа направлена не на решение практических задач, а на подготовку школьников к успешной сдаче ОГЭ и ЕГЭ;

– большой объем информации;

– программа жестко связана с учебным планом и не дает учителю «свободы» в планировании;

– шаблонность и формализация в преподавании.

Нами еще в 2005 г. [1], на примере Украины, были выявлены некоторые признаки кризиса, относящиеся к математическому образованию, а также была осуществлена попытка вскрыть исторические и социальные корни данной проблемы. Было установлено, что, несмотря на предпринятые обоими государствами шаги к разграничению позиций по вопросам образования, по многим аспектам наблюдается почти полное совпадение.

Причина состоит в наличии общих корней – советской системы образования. Поэтому все сказанное по отношению к украинской системе образования в значительной мере характерно и для российской системы.

Впоследствии, в 2018 г. [2] и 2022 г. [3], мы вновь обратились к данной проблеме, но уже применительно к математическому образованию в РФ. И, к сожалению, следует отметить, что все сказанное в статьях в подавляющем большинстве не утратило своей актуальности до сих пор.

Следствием обеспокоенности падением качества математического образования, разделяемой как обществом в целом, так и профессиональным сообществом, стало появление в 2013 г. Концепции развития математического образования в Российской Федерации [6]. Главная ее задача – добиться того, чтобы Россия заняла передовые позиции в мире по уровню математической подготовки, и превратить математику в перспективную и привлекательную сферу познания и практического применения. В дальнейшем, в 2014 г., был утвержден план мероприятий по реализации данной Концепции.

Параллельно разрабатывались и вводились поэтапно, в 2010–2012 гг., Федеральные государственные образовательные стандарты второго поколения, которые действовали до 2020 г. И уже в сентябре 2022 г. произошел переход на ФГОС нового поколения.

Тем не менее ситуация до сих пор остается критической. В ноябре 2023 г. на совещании по вопросам повышения качества физико-математического и химико-биологического образования ректор МГУ имени М.В. Ломоносова В.А. Садовничий заявил о том, что существующая в стране концепция развития математического образования оказалась неэффективной и предложил обновить ее с учетом современных задач и вызовов, а также национальных целей развития РФ до 2030 г. В качестве одного из аргументов он привел снижение количества учащихся, сдающих математику профильного уровня.

В ноябре 2024 г. Правительством Российской Федерации был утвержден план мероприятий по повышению качества математического и естественнонаучного образования до 2030 г. Данный план предполагает повышение качества преподавания математики и естественно-научных предметов в общеобразовательных организациях, ликвидацию нехватки учителей соответствующих профилей и улучшение качества их подготовки.

Естественно, данные мероприятия несколько улучшили ситуацию. Так, наметилась положительная тенденция относительно сдачи на ЕГЭ профильной математики по выбору: после обвального падения в 2023 г. вырос средний балл (рис. 1).

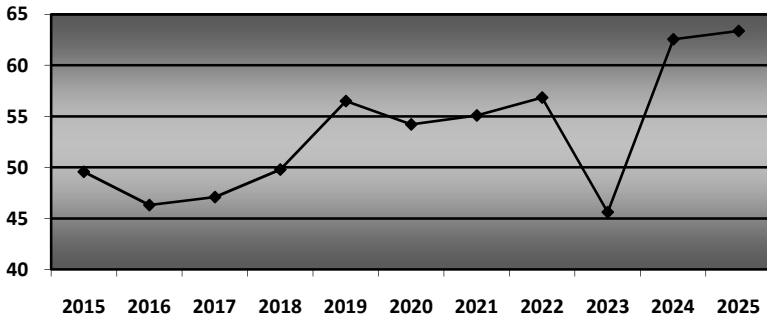


Рис. 1. Средний балл при сдаче профильной математики по выбору на ЕГЭ

Также несколько изменился упомянутый выше процент сдававших профильную математику по выбору (рис. 2). Так, если при обвальном падении в том же, 2023 г., профильную математику сдавало по выбору 282 тысячи человек, то есть 41 % от общего числа участвовавших в ЕГЭ, то в 2024 г. – это уже 307 тысяч (44 %), в 2025 г. – 337 тысяч (47 %) выпускников. Тем не менее, эти показатели еще далеки от результатов 2020 и 2021 г., когда этот процент достигал 51.

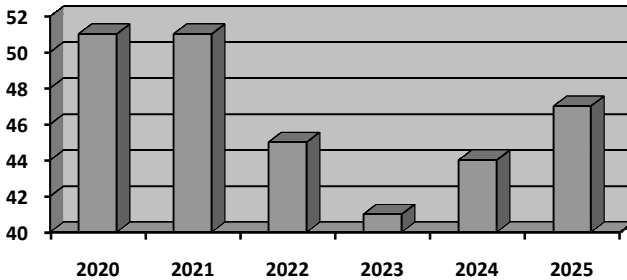


Рис. 2. Процент сдававших профильную математику по выбору (от общего числа участвовавших в ЕГЭ)

Коллективом учителей из Казани, исходя из анализа педагогической и методической литературы, были выявлены противоречия при обучении математике, негативно влияющие на данный процесс, а значит, и на качество математического образования [7]:

1. Между содержанием учебного материала и его объемом.
2. Между развитием математики и методикой ее преподавания.

3. Между совместной учебной деятельностью школьников и особенностями познавательной деятельности каждого из них.

Подтверждением сказанной негативной тенденции является проведенный нами анализ результатов выполнения тестовых заданий по элементарной математике на протяжении 7 учебных лет – с 2018 по 2025 гг. среди студентов направлений подготовки «Математика» и «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)» (Профили: Математика и информатика, Математика и экономика, Физика и математика). Данная учебная дисциплина является одной из дисциплин вузовской программы, где это ощущается особо остро, так как она в наибольшей мере опирается на школьную математику. Кроме того, ситуация усугубляется тем, что данная дисциплина начинает изучаться с первого курса, то есть направлена на тех, кто только что покинул школьную скамью, и все то, что школа «не доработала», сразу же становится ощутимым.

Таблица 1. Результаты выполнения тестовых заданий по элементарной математике (по 100-балльной системе)

Учебный год	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Название теста	– 2019	– 2020	– 2021	– 2022	– 2023	– 2024	– 2025
Арифметика	70	67	63	52	61	65	69
Уравнения и неравенства	70	59	55	49	65	62	64
Функции	71	57	54	49	55	57	58
Корни и логарифмы	72	63	66	59	68	64	66
Основы тригонометрии	72	64	54	52	70	66	62
Тригонометрические уравнения и неравенства	63	61	56	50	47	46	45
Треугольники	73	79	61	62	61	69	67
Многоугольники	86	79	66	61	84	79	77
Окружность. Вписанные и описанные многоугольники	77	73	67	60	63	60	60
Начала стереометрии	67	65	62	43	56	53	61
Многогранники	76	74	72	60	65	64	62
Тела вращения	80	74	70	60	71	67	65

Как видно из таблицы 1, за 7 лет результаты практически по всем тестам ухудшились. Бесспорно, большое негативное влияние на процесс получения знаний оказал и переход школ на дистанционную форму обучения в связи с ковидными ограничениями, и события на Донбассе в 2022 г.

Даже при наблюдавшемся в последние два года позитивном тренде, результаты так и не достигли уровня 7-летней давности. Ввиду того, что данные тестовые задания в большей части опираются на школьный курс математики, это свидетельствует об ухудшении качества математического образования, начиная со школы.

Еще одним доказательством этого служит то, что каждый четвертый (23,5 %) из опрошенных нами первокурсников наибольшей проблемой в обучении в первом семестре считает слабую школьную базу.

Данные результаты являются демонстрацией того, что решение проблемы повышения качества математического образования должно брать начало еще со школы. И первым шагом в данном вопросе должна быть коренная перестройка учебной программы по математике.

В 2022 г. [3] мы подробно описали, каким, по нашему мнению, должна быть программа по математике для основной и средней школы, при этом был сделан акцент на наиболее проблемных темах школьного курса математики. Но прошло более 3 лет, а ситуация в корне не поменялась.

Да, предприняты попытки в создании единого образовательного пространства в России. Теперь каждому ребенку предоставляются равные образовательные возможности независимо от места жительства и дохода семьи. Большое внимание уделено информационной культуре и финансовой грамотности, что важно в связи с мировыми финансово-экономическими информационными и трендами. По математике вводятся уровни преподавания. Бесспорно, все это важно. Но программа по математике коренным образом не меняется, учебники не претерпевают существенных изменений. И качество математического образования все так же не улучшается. Это мы можем отслеживать по знаниям новых абитуриентов.

Кроме того, описанное выше дистанционное обучение, наряду с отрицательным воздействием на учащихся, сыграло и положительную роль. Именно благодаря таким «экстремальным» условиям у школьников сформировались навыки самостоятельной работы, которые в «штатных» условиях были не востребованы в силу постоянного наличия учителя. С этим мы сталкиваемся, общаясь с первокурсниками [4]. Именно эти положительные изменения во взглядах школьников на процесс обучения тоже должны быть учтены при разработке новых программ и учебников.

Разумеется, предложенными нами мерами решение проблемы повышения качества математического образования не исчерпывается. Но без кардинального пересмотра школьной программы и учебников по математике невозможно добиться повышения качества математической подготовки учащихся, а значит, и качественных изменений в системе высшего образования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дымарский Я.М.* Про проблему реформування математичної освіти / Я.М. Дымарский, Л.В. Жовтан // Освіта Донбасу. 2005. № 5–6. С. 8–16.
2. *Жовтан Л.В.* О некоторых проблемах математического образования и путях их решения // Эвристическое обучение математике: Материалы IV Международной научно-методической конференции (19–20 апреля 2018 г.). Донецк: Изд-во ДонНУ, 2018. С. 78–81.
3. *Жовтан Л.В.* О некоторых путях повышения качества математического образования // Донецкие чтения 2022: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы VII Международной научной конференции, посвящённой 85-летию Донецкого национального университета (Донецк, 26–28 октября 2022 г.). Том 6: Педагогические науки. Часть 3 / под общ. ред. проф. С.В. Беспаловой. Донецк: Изд-во ДонНУ, 2022. С. 37–39
4. *Жовтан Л.В.* Самостоятельная работа с позиции студентов высшей школы: современное состояние // Донецкие чтения 2024: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы IX Международной научной конференции (Донецк, 15–17 октября 2024 г.). Том 6: Педагогические науки. Часть 1 / под общ. ред. проф. С.В. Беспаловой. Донецк: Изд-во ДонГУ, 2024. С. 76–79
5. *Костенко И.П.* Проблема качества математического образования в свете исторической ретроспективы: монография / ФГБОУ ВПО РГУПС (филиал в г. Краснодаре). М., 2013. 512 с.
6. *Распоряжение* Правительства России от 24 декабря 2013 г. № 2506-р о Концепции развития математического образования в Российской Федерации. URL: <http://static.government.ru/media/files/41d4b63b1dd474c16d7a.pdf> (дата обращения: 25.12.2025).
7. *Сенаторова Л.Г.* Актуальные проблемы преподавания математики в школе / Л.Г. Сенаторова, Н.С. Гейда, И.О. Бобрешова [и др.] // Педагогическое мастерство: материалы XXXII Междунар. науч. конф. (г. Казань, июнь 2022 г.). Казань: Молодой ученый, 2022.
8. *Сенькина Г.Е.* Единый государственный экзамен: проблемы и тенденции математической подготовки обучающихся // Современные проблемы науки и образования. 2018. № 6. URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=28403> (дата обращения: 05.01.2026)
9. *Шевченко Н.И.* Причины снижения качества математического образования / Н.И. Шевченко, Л.В. Егорова // Проблемы и перспективы развития образования в России. 2013. № 19. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/prichiny-snizheniya-kachestva-matematicheskogo-obrazovaniya> (дата обращения: 01.11.25)
10. *Шень А.* О непостижимой (не)эффективности преподавания математики // Троицкий вариант – наука. 2021. № 11(330).

УДК 51:378

Н. Т. Каримова

Военный институт (инженерно-технический)
Россия, г. Санкт-Петербург, e-mail: karimowa.nelli@yandex.ru

МЕТОДИКА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННОЙ СРЕДЫ ТАБЛИЧНОГО ПРОЦЕССОРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ

На примере расчета траектории движения тела, брошенного под углом к горизонту, представлена технология автоматизированного моделирования в табличном процессоре, включающая динамическое формирование временной сетки, вычисление координат и визуализацию результатов. Показано, что интеграция цифровых инструментов в учебную деятельность курсантов способствует развитию у них практических навыков анализа процессов по физике и формированию инженерного мышления. Методика апробирована в учебном процессе и подтверждает свою эффективность в контексте современных требований к военному образованию.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, физика, курсант, учебно-исследовательская деятельность

N. T. Karimova

Military Institute (Engineering and Technical)
Russia, St. Petersburg, e-mail: karimowa.nelli@yandex.ru

A METHOD OF USING THE INFORMATION ENVIRONMENT OF A SPREADSHEET PROCESSOR TO SOLVING PROBLEMS IN PHYSICS

Using the example of calculating the trajectory of a body thrown at an angle to the horizontal, this article presents an automated spreadsheet modeling technology, including dynamically generating a time grid, calculating coordinates, and visualizing the results. It is demonstrated that integrating digital tools into cadets' learning activities helps them develop practical skills in analyzing physics processes and foster engineering thinking. The methodology has been tested in the classroom and has proven its effectiveness in the context of modern military education requirements.

Keywords: spreadsheet, computer modeling, physics, military education, data visualization, learning activities

Среди естественно-научных дисциплин физика занимает особое место с точки зрения наглядности и возможности компьютерного моделирова-

ния ее процессов. Изучение законов физики требует не только теоретических знаний, но и умения их применять при решении практических задач.

Решение общеинженерных учебных задач предлагается проводить с применением интерактивных технологий обучения на основе табличного процессора, который, в свою очередь, имеет понятный интерфейс и дает достаточную точность данных.

Педагогические исследования последних лет подтверждают, что компьютерное моделирование эффективно преодолевает разрыв между абстрактными физическими законами и их практическим применением. Н.В. Макарова и В.Б. Волков указывают, что использование табличных процессоров позволяет проводить полноценный компьютерный эксперимент, в ходе которого осуществляется анализ чувствительности модели к изменению исходных параметров, что обеспечивает реализацию деятельностного подхода в обучении [1].

Исследования в области когнитивной психологии показывают, что визуализация данных повышает эффективность усвоения сложных концепций. И.В. Роберт отмечает, что реализация возможностей информационных технологий в визуализации закономерностей изучаемых процессов позволяет направить внимание на сущность явления, а не на технические детали вычислений [2].

Однако существует определенный педагогический риск, заложенный в автоматизации изучения физических процессов. И.Г. Захарова подчеркивает, что существует опасность формирования у обучающихся «кнопочного» подхода к использованию информационных технологий, когда результаты расчетов получаются без критического осмысления [3]. Это подчеркивает необходимость не просто моделирования в среде табличного процессора, но и формирования у обучающихся умения верифицировать полученные данные и анализировать их.

М.П. Лапчик отмечает, что применение численных методов в учебном процессе позволяет организовать содержательный анализ результатов и возможных погрешностей моделирования [4]. Такого рода учебно-исследовательская деятельность способствует глубокому пониманию ограничений физических моделей и развитию критического мышления обучающихся.

Особый интерес представляет метод, при котором курсанты не только решают предложенные преподавателем задачи, но и сами формулируют их, определяя различные начальные условия и наблюдая за изменениями результатов. Такой подход стимулирует самостоятельную исследовательскую деятельность, формирует умение ставить гипотезы и проверять их экспериментальным путем. Курсанты учатся не только применять готовые формулы, но и анализировать физический смысл полученных результатов,

оценивать реалистичность модели и предлагать пути ее усовершенствования. Эта исследовательская компонента особенно ценна для будущих военных инженеров, которым предстоит решать нетиповые задачи в условиях ограниченной информации.

В качестве демонстрационного примера рассмотрим задачу о движении тела, брошенного под углом к горизонту, поскольку она имеет прямую релевантность для военно-технических специальностей и позволяет наглядно продемонстрировать возможности параметрического анализа. Такой подход обеспечивает преемственность между базовыми физическими законами и их применением в военно-инженерной практике.

Условие задачи следующее: «Рассчитайте высоту и дальность полета ракеты класса «земля-земля» при следующих начальных условиях – $v_0 = 20$ м/с, $\alpha = 45^\circ$, идеальные погодные условия. Постройте в табличном процессоре график полета ракеты и, меняя начальные условия, проследите за преобразованиями кривой полета».

Курсантами рассматривалась идеальная модель без учета сопротивления воздуха, описываемая уравнениями

$$x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad y(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2},$$

где v_0 – начальная скорость; α – угол возвышения; g – ускорение свободного падения [5]. В повышенном уровне заданий в модель вводятся дополнительные факторы (ветер, аэродинамическое сопротивление), что требует перехода к численным методам, реализуемым через итерационные расчеты.

Разработана методика автоматизированного расчета траектории ракеты. Основное преимущество подхода заключается в динамическом обновлении данных при изменении начальных условий, что соответствует требованиям интерактивных технологий обучения.

Пошаговая методика создания автоматизированной модели расчета траектории движения тела в табличном процессоре для курсантов включает следующие этапы:

1. Создание исходных данных:
 - в ячейки A1:A3 введите заголовки " v_0 (м/с)", "Угол (град)" и " g (м/с²)"
 - в ячейки B1:B3 введите значения "20", "45" и "9,81"
2. Подготовка вспомогательных величин:
 - в ячейки A5:A8 введите обозначения: "Угол (рад)", " v_0x ", " v_0y " и "Время полёта (с)"
 - сделайте перевод угла в радианы (ячейка B5): " $=B2*PI()/180$ "
 - оформите расчет компонентов скорости:
 - Горизонтальная составляющая (B6): " $=B1*COS(B5)$ "

- Вертикальная составляющая (B7): " $=B1*\text{SIN}(B5)$ "
- Определение времени полета (B8): " $=2*B7/B3$ " (основано на симметрии параболической траектории)

3. Формирование временной сетки:

- в ячейку D1 введите заголовок "t"
- в ячейку D2 введите формулу: " $=\text{ЕСЛИ}(\text{СТРОКА}(\text{D2})-1<=\text{ОКРУГЛ}(\$B\$8/0,1;0); (\text{СТРОКА}(\text{D2})-2)*0,1; \$B\$8)$ "
(Эта формула останавливает расчет при достижении времени полета, исключая появление отрицательных значений координат)
- Протяните формулу вниз до ячейки D100

4. Расчет координат:

- в ячейки E1 и F1 введите заголовки "x(t)" и "y(t)"
- в ячейку E2 введите формулу для x(t): " $=\text{ЕСЛИ}(\text{D2}<>""; \$B\$6*\text{D2}; "")$ "
- в ячейку F2 введите формулу для y(t): " $=\text{ЕСЛИ}(\text{D2}<>""; \$B\$7*\text{D2} - \$B\$3*\text{D2}^2/2; "")$ "
- протяните обе формулы вниз до строки 100

5. Визуализация результатов:

- выделите диапазон E1:F100
- перейдите на вкладку "Вставка"
- выберите тип диаграммы "Точечная с гладкими линиями"
- настройте параметры диаграммы: подпишите оси, добавьте заголовок "Траектория движения тела"

	A	B	C	D	E	F
1	v_0 (м/с)	20		t	x(t)	y(t)
2	Угол (град)	45		0	0	0
3	g (м/с ²)	9,81		0,1	1,41421	1,3651636
4				0,2	2,82843	2,6322271
5	Угол (рад)	0,78539816		0,3	4,24264	3,8011907
6	v_{0x}	14,1421356		0,4	5,65685	4,8720542
7	v_{0y}	14,14213562		0,5	7,07107	5,8448178
8	Время полёта (с)	2,88320808		0,6	8,48528	6,7194814
9				0,7	9,89949	7,4960449
10				0,8	11,3137	8,1745085
11				0,9	12,7279	8,7548721
12				1	14,1421	9,2371356
13				1,1	15,5563	9,6212992

Рис. 1. Фрагмент листа табличного процессора с автоматически генерируемой таблицей расчета траектории движения тела

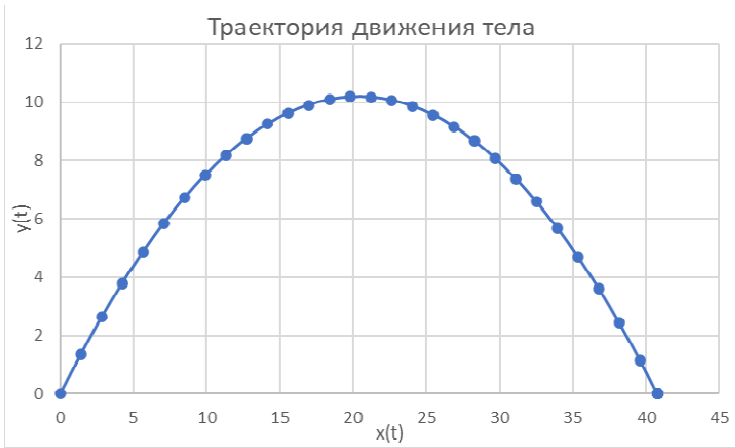


Рис. 2. График зависимости координат x и y от времени при $v_0 = 20$ м/с, $\alpha = 45^\circ$

Предложенный алгоритм обладает рядом преимуществ. Во-первых, интерактивность: курсанты могут мгновенно оценивать влияние параметров на траекторию, что усиливает понимание физических законов. Во-вторых, автономность: отсутствие необходимости в программировании снижает порог входа для обучающихся с базовыми ИТ-навыками. В-третьих, совместимость: модель легко интегрируется в учебные материалы (электронные пособия, презентации), что соответствует требованиям цифровой трансформации образования.

Реализация предложенной методики в учебной деятельности военного вуза осуществлялась по следующей схеме: на первом этапе (15 минут) проводилась теоретическая подготовка; затем (10 минут) преподаватель демонстрировал работу шаблона; основная часть занятия (45 минут) была посвящена самостоятельной работе курсантов; завершающий этап (5 минут) включал рефлексию и обсуждение ограничений модели. В ходе самостоятельной работы курсанты варьировали параметры, фиксировали результаты в таблице, делали выводы о влиянии угла запуска на дальность полета, сверяли расчеты программы с решением задачи в конспектах.

Автоматизация расчетов, визуализация результатов и возможность параметрических исследований способствуют развитию у курсантов навыков анализа процессов физики и формированию инженерного мышления. Интеграция такой методики в учебную деятельность усиливает мотивацию обучающихся и позволяет преодолеть разрыв между абстрактными физическими законами и их практическим применением.

Дальнейшее развитие этого направления может включать создание библиотеки шаблонов для других разделов физики, а также постепенное усложнение моделей с введением дополнительных факторов (сопротивление воздуха, ветровые нагрузки), что позволит плавно подвести курсантов к освоению более специализированных программных средств и методов математического моделирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Макарова Н.В.* Информатика: учебник для вузов: стандарт третьего поколения / Н.В. Макарова, В.Б. Волков; под ред. Н.В. Макаровой. Санкт-Петербург: Питер, 2011. 576 с.
2. *Роберт И.В.* Современные информационные технологии в образовании: дидактические проблемы; перспективы использования. М.: ИИО РАО, 2010. 140 с.
3. *Захарова И.Г.* Использование электронных ресурсов в учебно-познавательной деятельности студентов вуза // Вестник Тюменского государственного университета. Серия «Педагогика. Психология». 2011. №9. С. 33–37.
4. *Лапчик М.П. [и др.]*. Численные методы: учеб. пособие / под ред. М. П. Лапчика. 5-е изд. М.: Академия, 2009. 383 с.
5. *Савельев И.В.* Курс общей физики. В 3 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. М.: Наука, 1989. 436 с.

УДК 517:378

В. И. Минаков, Е. В. Акиндинова, О. О. Желтикова

ВУНЦ ВВС «ВВА»
Россия, г. Воронеж, e-mail: vim0846@mail.ru,
lena83@mail.ru. ksu_ola@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СУММИРОВАНИЯ В РЕШЕНИИ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ

В статье рассматривается метод решения линейных рекуррентных соотношений первого порядка с помощью суммирующего множителя.

Ключевые слова: рекуррентные соотношения, суммирующий множитель, последовательность

V. I. Minakov, E. V. Akindinova, O. O. Zheltikova

MERC AF «AFA»,
Russia, Voronezh, e-mail: vim0846@mail.ru,
lena83@mail.ru. ksu_ola@mail.ru

APPLICATION OF THE SUMMATION METHOD IN SOLVING OLYMPIAD PROBLEMS

The article discusses a method for solving linear first-order recurrence relations using a summation factor.

Keywords: recurrence relations, summation factor, sequence

Будем рассматривать линейные рекуррентные соотношения первого порядка.

Начнём с однородного рекуррентного соотношения первого порядка $x_{n+1} - qx_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$,

где q некоторое число. Это соотношение можно переписать в виде $x_{n+1} = qx_n$. Известно, что это равенство задаёт геометрическую прогрессию со знаменателем q . Найдём её общий член:

$$x_{n+1} = qx_n \Rightarrow \prod_{k=1}^{n-1} \frac{x_{k+1}}{x_k} = \prod_{k=1}^{n-1} q \Leftrightarrow \frac{x_n}{x_1} = q^{n-1} \Leftrightarrow x_n = x_1 q^{n-1}.$$

Таким образом, данное рекуррентное соотношение имеет множество решений. Формула $x_n = x_1 q^{n-1}$ определяет общее решение. Любое част-

ное решение определяется заданием начального значения x_1 . Итак, решением рекуррентного соотношения первого порядка с постоянными коэффициентами является геометрическая прогрессия.

Рассмотрим теперь неоднородное рекуррентное соотношение

$$x_{n+1} - x_n = d \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n + d, \quad n = 1, 2, \dots,$$

которое, как известно, задаёт арифметическую прогрессию с разностью d .

Для решения этого рекуррентного соотношения, то есть нахождения общего члена арифметической прогрессии, применим формулу

$$\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1. \quad (1)$$

В результате будем иметь

$$\sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=1}^{n-1} d \Leftrightarrow x_n - x_1 = (n-1)d \Leftrightarrow x_n = x_1 + (n-1)d.$$

Далее рассмотрим рекуррентное соотношение, которое является обобщением этих двух случаев:

$$x_{n+1} - qx_n = d, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Для того чтобы можно было применить формулу (1), умножим обе части рекуррентного соотношения на множитель $1/q^{n+1}$. Тогда получим

$$\frac{x_{n+1}}{q^{n+1}} - \frac{x_n}{q^n} = \frac{d}{q^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{x_{k+1}}{q^{k+1}} - \frac{x_k}{q^k} \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{d}{q^k} \Leftrightarrow \frac{x_n}{q^n} - \frac{x_1}{q} = d \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{q^k}$$

$$x_n = x_1 q^{n-1} + d \sum_{k=1}^{n-1} q^{n-k} = x_1 q^{n-1} + d \sum_{k=1}^{n-1} q^k.$$

Используя значение суммы геометрической прогрессии, запишем решение рекуррентного соотношения в виде

$$x_n = x_1 q^{n-1} + d \sum_{k=1}^{n-1} q^k = x_1 q^{n-1} + d \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}. \quad (3)$$

При $d = 0$ формула (3) даёт общий член геометрической прогрессии $x_n = x_1 q^{n-1}$, а при $q = 1$ – общий член арифметической прогрессии: $x_n = x_1 + (n-1)d$.

До сих пор рассматривались простейшие рекуррентные соотношения первого порядка с постоянными коэффициентами. Для их решения бы-

ла применена формула суммирования (1). Оказывается, что и в общем случае между решением линейных рекуррентных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами и с произвольной правой частью и суммированием последовательностей существует тесная связь. Покажем это.

Пусть требуется найти замкнутое выражение для суммы

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} a_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Придавая n значения $1, 2, \dots$, получаем последовательность S_n , которую можно задать рекуррентно: $S_1 = a_1$, $S_n - S_{n-1} = a_n$, $n \geq 2$. Решая это рекуррентное соотношение, найдём сумму S_n . Следовательно, суммы можно вычислять в замкнутой форме, используя решения рекуррентных соотношений. Покажем, что и наоборот решение любого рекуррентного соотношения первого порядка вида

$$a_n x_{n+1} - b_n x_n = c_n, \quad (4)$$

где a_n, b_n, c_n – заданные последовательности, можно свести к суммированию умножив соотношение (4) на некоторый суммирующий множитель μ_n [1]. После умножения равенства (4) на μ_n получим

$$\mu_n a_n x_{n+1} - \mu_n b_n x_n = \mu_n c_n.$$

Множитель μ_n надо подобрать так, чтобы выполнялось равенство $\mu_n a_n = \mu_{n+1} b_{n+1}$. Далее сделаем замену $S_n = \mu_n b_n x_n$. Тогда для последовательности S_n получим рекуррентное соотношение $S_{k+1} - S_k = \mu_k c_k$, для решения которого применим формулу суммирования (1)

$$\sum_{k=1}^{n-1} (S_{k+1} - S_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k c_k \Rightarrow S_n = S_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k c_k.$$

Отсюда для последовательности x_n получаем решение

$$x_n = \frac{1}{\mu_n b_n} \left(\mu_1 b_1 x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k c_k \right).$$

Остаётся вопрос, как найти суммирующий множитель μ_n . Его выражение получим из равенства $\mu_n a_n = \mu_{n+1} b_{n+1}$:

$$\mu_n a_n = \mu_{n+1} b_{n+1} \Rightarrow \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{b_{k+1}}.$$

Отсюда для суммирующего множителя получаем выражение

$$\mu_n = \mu_1 \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}{b_2 b_3 \cdots b_n}. \quad (5)$$

Значение μ_1 можно выбрать произвольным.

Заметим, что метод суммирующего множителя применим, когда все коэффициенты a_n и b_n отличны от нуля.

Из изложенного выше можно сделать вывод: всякое линейное рекуррентное соотношение первого порядка имеет суммирующий множитель. С помощью умножения на суммирующий множитель решение рекуррентного уравнения сводится к суммированию по формуле (1).

Проиллюстрируем этот метод в следующих задачах.

Задача 1. Найти общий член последовательности, заданной рекуррентным соотношением $nx_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)!}$, $x_1 = 1$.

Решение. Здесь имеем $a_n = n$, $b_n = 1$. По формуле (5) находим суммирующий множитель $\mu_n = \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{1 \cdot 1 \cdots 1} = (n-1)!$. Умножая данное рекуррентное соотношение на множитель μ_n , получим

$$n! x_{n+1} - (n-1)! x_n = \frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n(n+1)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Просуммируем эти равенства от 1 до $n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} (k! x_{k+1} - (k-1)! x_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Применяя к обеим частям полученного равенства суммирование по формуле (1), получим

$$(n-1)! x_n - 0! x_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Отсюда, учитывая, что $x_1 = 1$, находим

$$x_n = \frac{1}{(n-1)!} \left(1 + \frac{n-1}{n} \right) = \frac{2n-1}{n!}.$$

Отметим, что формулу (5) можно не запоминать, а для нахождения суммирующего множителя при решении задачи проделывать действия, описанные в теории.

Задача 2. Найти решение уравнения [2]

$$4nx_{n+1} + (n+1)x_n = n(n+1), \quad x_1 = 0.$$

Решение. Находим μ_n из условия $4n\mu_n = -(n+2)\mu_{n+1}$;

$$\frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} = \frac{-4k}{k+2}; \quad \mu_n = \mu_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(-4k)}{k+2} = \mu_1 (-4)^{n-1} \frac{2}{n(n+1)} = \frac{(-4)^{n-1}}{n(n+1)}.$$

Здесь выбрали $\mu_1 = \frac{1}{2}$. После умножения исходного уравнения на μ_n получим:

$$\begin{aligned} \frac{4^n (-1)^{n-1}}{n+1} x_{n+1} - \frac{4^{n-1} (-1)^{n-2}}{n} x_n &= 4^{n-1} (-1)^{n-1}, \\ \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{4^k (-1)^{k-1}}{k+1} x_{k+1} - \frac{4^{k-1} (-1)^{k-2}}{k} x_k \right) &= \sum_{k=1}^{n-1} 4^{k-1} (-1)^{k-1}, \\ \frac{4^{n-1} (-1)^{n-2}}{n} x_n + x_1 &= \frac{(-4)^{n-1} - 1}{-5}, \quad x_n = \frac{n}{5} \left(1 + \frac{(-1)^n}{4^{n-1}} \right), \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Можно заметить, что предварительно упростив исходное рекуррентное соотношение, разделив на $n(n+1)$ и сделав замену $\frac{x_n}{n} = a_n$, приходим к соотношению $4a_{n+1} - (-1)a_n = 1$, $a_1 = 0$, для которого суммирующий множитель найти легче и $\mu_n = -(-4)^n$.

Задача 3. Вычислить $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n+1} x dx$ [1].

Решение. $J_{2n+1} = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n+1} x dx = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n-1} x d(\operatorname{tg} x) - J_{2n-1} = \frac{1}{2n} - J_{2n-1}$.

Получили рекуррентное соотношение $J_{2n+1} + J_{2n-1} = \frac{1}{2n}$, $J_1 = \ln \sqrt{2}$.

$\mu_n = -\mu_{n+1}$, $\mu_n = \mu_1 (-1)^{n-1} = (-1)^n$. После умножения на суммирующий множитель приходим к соотношению

$$\begin{aligned} (-1)^n J_{2n+1} - (-1)^{n-1} J_{2n-1} &= \frac{(-1)^n}{n}, \quad x_n = (-1)^n J_{2n+1}, \\ \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k}, \quad x_n = x_0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k}, \end{aligned}$$

$$(-1)^n J_{2n+1} = J_1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k},$$

$$J_{2n+1} = (-1)^n \left(\ln \sqrt{2} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k} \right).$$

Заметим, что для некоторых рекуррентных соотношений суммирующий множитель легко угадывается. Например, в следующей задаче.

Задача 4. Вычислить определитель $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 6 & 6 & \dots & 2n \\ 3 & 6 & 12 & \dots & 3n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 2n & 3n & \dots & n(n+1) \end{vmatrix}$

Решение. Запишем последний столбец определителя в виде суммы двух слагаемых и представим исходный определитель в виде суммы двух определителей:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 6 & 6 & \dots & 2n \\ 3 & 6 & 12 & \dots & 3n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 2n & 3n & \dots & n(n+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & \dots & 0 \\ 2 & 6 & 6 & \dots & 0 \\ 3 & 6 & 12 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 2n & 3n & \dots & n \end{vmatrix} + n \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & \dots & 1 \\ 2 & 6 & 6 & \dots & 2 \\ 3 & 6 & 12 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 2n & 3n & \dots & n \end{vmatrix}.$$

Первый определитель разложим по элементам последнего столбца, а во втором последовательно умножим последний столбец на $-1, -2, \dots, -(n-1)$ и прибавим соответственно к первому, второму и так далее столбцу. После чего получим

$$\Delta_n = n\Delta_{n-1} + n \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = n\Delta_{n-1} + nn!.$$

В итоге для вычисления определителя имеем рекуррентное соотношение

$$\Delta_k = k\Delta_{k-1} + k k!, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

В данном случае нетрудно заметить, что суммирующий множитель равен $1/n!$. Умножим обе части равенства на этот множитель и просуммируем по k от 2 до n

$$\sum_{k=2}^n \left(\frac{\Delta_k}{k!} - \frac{\Delta_{k-1}}{(k-1)!} \right) = \sum_{k=2}^n k.$$

После суммирования

$$\frac{\Delta_n}{n!} - \frac{\Delta_1}{1!} = \sum_{k=2}^n k = \frac{(2+n)(n-1)}{2} \Rightarrow \frac{\Delta_n}{n!} = 2 + \frac{(2+n)(n-1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

$$\Delta_n = \frac{n^2 + n + 2}{2} n!.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лукьянов В.Д. О разностных уравнениях первого порядка с переменными коэффициентами // Вопросы методики подготовки к математическим олимпиадам в высшей школе: сб. докл. Семинара. Вып. 11. СПб.: ВИТУ, 2009. С. 105-108.
2. Сарайкин В.А. Пособие для подготовки к выступлениям на олимпиадах по математике. Часть 3. Интегральное исчисление, дифференциальные уравнения (задачи с решениями). Новосибирск: НВВКУ, 2020. 182 с.

УДК 51:378

Ю. К. Оленикова, В. Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, *e-mail: olenikovajk@mail.ru, vroitenberg@mail.ru*

**О ВСЕРОССИЙСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЕ
ПО МАТЕМАТИКЕ. ЯРОСЛАВЛЬ, 2025**

Приведены задачи Всероссийской студенческой олимпиады по математике, проведенной в Ярославском государственном техническом университете в октябре 2025 года, примеры их решения, итоги олимпиады и их анализ.

Ключевые слова: студенческая математическая олимпиада, решение задач

Ju. K. Olenikova, V. Sh. Roitenberg

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, *e-mail: olenikovajk@mail.ru, vroitenberg@mail.ru*

**ON THE ALL-RUSSIAN STUDENT OLYMPIADS
IN MATHEMATICS. YAROSLAVL, 2025**

We present the tasks of the All-Russian Student Olympiad in Mathematics, held by Yaroslavl State Technical University in October 2025, examples of their solutions, the results of the Olympiad and their analysis.

Keywords: student mathematical Olympiad, task solution

9-12 октября 2025 года на базе ЯГТУ проводилась очередная Всероссийская студенческая олимпиада по математике. В ней приняли участие 150 студентов и курсантов 27 вузов из 12 регионов России: МГТУ им. Н.Э. Баумана, РТУ МИРЭА, НИЯУ МИФИ, РЭУ им. Г.В. Плеханова, НИУ МЭИ, МФТИ, НИУ МГСУ (Москва), Горный университет, ВКА им. А.Ф. Можайского, ВАС, РГПУ (Санкт-Петербург); ВА ВКО (Тверь); ВА ВПВО (Смоленск); ВА РВСН (Балашиха); ИАТЭ НИЯУ МИФИ (Обнинск); ФВА РВСН (Серпухов); ВА РХБЗ, КГУ (Кострома), РГРТУ (Рязань), ВУНЦ ВВС «ВВА» (Воронеж); НГТУ (Новосибирск); ТГТУ (Тамбов); ТПУ (Томск); РГАТУ(Рыбинск); ЯВВУ ПВО, ЯГТУ, ЯрГУ (Ярославль). Это в полтора раза больше участников, чем в наших олимпиадах последних лет со времени пандемии коронавируса [1, 2, 3]. Немного изменился и качественный состав. Наряду с постоянными участниками с сильными командами таких вузов как МГТУ им. Н.Э. Баумана, РТУ МИРЭА, НГТУ, ТПУ стали участвовать и занимать призовые места команды МФТИ и МИФИ.

Абсолютными победителями и призёрами олимпиады в личном конкурсе стали студенты вузов: I место – РТУ МИРЭА, II место – МФТИ, III место – ФВА РВСН; в командном зачете команды вузов: I место – МФТИ и ЯГТУ, II место РТУ МИРЭА и ВКА им. А.Ф. Можайского, III место МГТУ им. Н.Э. Баумана.

В соответствии с Положением подводились итоги, как всегда и по номинациям отдельно для второкурсников и старшекурсников: математические и естественные науки (М), технические науки и технологии (Т), науки об обществе и образование (О). В последней из названных номинаций старшекурсников не было.

В таблице 1 приведены вузы, студенты которых стали победителями и призёрами личных конкурсов по номинациям.

Таблица 1. Вузы-победители в личных конкурсах по номинациям

	1 место	2 место	3 место
М – 2 к	МФТИ	МГТУ им. Н.Э. Баумана	МГТУ им. Н.Э. Баумана
М – ст. к	ЯГТУ и МГТУ им. Н.Э. Баумана	РТУ МИРЭА и МФТИ	МФТИ
Т – 2 к	ТПУ	ЯрГУ	ВКА им. А.Ф. Можайского
Т – ст. к	НИЯУ МИФИ	ВКА им. А.Ф. Можайского	ВКА им. А.Ф. Можайского
О – 2 к	ЯГТУ	РЭУ им. Г.В. Плеханова	РЭУ им. Г.В. Плеханова

Традиционно [1,2,3] приводятся также данные из протокола итогов олимпиады, характеризующие качество выполненных работ. Эта таблица вместе с приведенными в статье задачами будет полезна для участников олимпиад и их тренеров в качестве методического материала для подготовки олимпиад.

Таблица 2. Доля правильно решивших задачи по номинациям

Номер задачи	2-й курс			Старшие курсы	
	М	Т	О	М	Т
1.	50%	44%	40%	82%	65%
2.	42%	28%	40%	48%	35%
3.	0%	0%	60%	0%	0%
4.	33%	9%	60%	30%	25%
5.	8%	7%	20%	39%	19%
6.	33%	9%	0%	48%	21%
7.	25%	7%	0%	30%	25%
8.	16%	0%	0%	17%	25%
9.	33%	9%	0%	13%	25%
10.	16%	0%	0%	0%	12%

Задачи и решения

1. Все элементы квадратной матрицы n -го порядка с ненулевым определителем имеют один и тот же модуль, отличный от нуля. Чему равно минимальное и максимальное число отрицательных элементов у таких матриц?

◀ Рассмотрим матрицу A с элементами $a_{1j} = a > 0$ для $j = 1, \dots, n$ и $a_{ij} = a > 0$ для $i = 2, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, $i \neq j$ и $a_{ij} = -a < 0$ для $i = j = 2, \dots, n$. У нее $n-1$ отрицательных и $n^2 - n + 1$ положительных элементов. Вычитая из каждой строки, начиная со второй, первую строку, получим треугольную матрицу с ненулевыми элементами на главной диагонали. Поэтому $\det A \neq 0$. Матрица, у которой отрицательных элементов меньше $n-1$, имеет две одинаковые строки, и потому ее определитель равен нулю. Поэтому минимальное число отрицательных элементов равно $n-1$, а максимальное число положительных элементов равно $n^2 - n + 1$. Так как при умножении матрицы на -1 все элементы меняют знак, то максимальное число отрицательных элементов равно $n^2 - n + 1$. ▶

Ответ: $n-1$ и $n^2 - n + 1$.

2. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен α . Найдите угол γ между медианами боковых сторон.

◀ Пусть C – вершина равнобедренного треугольника ABC , AM_1 и BM_2 – медианы боковых сторон. Обозначим $\vec{a} := \overrightarrow{AC}$, $\vec{b} := \overrightarrow{BC}$. Тогда $\vec{m}_1 := \overrightarrow{AM_1} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, $\vec{m}_2 := \overrightarrow{BM_2} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$. Можно считать $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. Тогда $\vec{a}\vec{b} = \cos \alpha$,

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\vec{m}_1, \vec{m}_2}) &= \frac{\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2}{|\vec{m}_1| \cdot |\vec{m}_2|} = \frac{\frac{5}{4}\vec{a}\vec{b} - \frac{1}{2}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2)}{\sqrt{\vec{a}^2 + \frac{1}{4}\vec{b}^2 - \vec{a}\vec{b}} \cdot \sqrt{\vec{b}^2 + \frac{1}{4}\vec{a}^2 - \vec{a}\vec{b}}} = \\ &= \frac{\frac{5}{4}\cos \alpha - 1}{\frac{5}{4} - \cos \alpha} = \frac{5\cos \alpha - 4}{5 - 4\cos \alpha}. \end{aligned} \blacktriangleright$$

Ответ: $\gamma = \arccos \frac{5\cos \alpha - 4}{5 - 4\cos \alpha}$, если $\cos \alpha \geq 4/5$,

$$\gamma = \arccos \frac{4 - 5\cos \alpha}{5 - 4\cos \alpha}, \text{ если } \cos \alpha < 4/5.$$

3. Найдите предел $A = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^{\arctg x} - (\arctg x)^x}{x^{\tg x} - (\tg x)^x}$.

$$\blacktriangleleft A = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{\arctg x \ln x} - e^{x \ln \arctg x}}{e^{\tg x \ln x} - e^{x \ln \tg x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{\arctg x \ln x}}{e^{\tg x \ln x}} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{x \ln \arctg x - \arctg x \ln x} - 1}{e^{x \ln \tg x - \tg x \ln x} - 1}.$$

Так как

$$\lim_{x \rightarrow +0} \arctg x \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \tg x \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = 0,$$

$$\begin{aligned} x \ln \arctg x - \arctg x \ln x &= x \ln(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)) - (x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)) \ln x = \\ &= x \ln(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)) + (\frac{x^3}{3} + o(x^3)) \ln x = \\ &= -\frac{x^3}{3} + o(x^3) + \frac{1}{3} x^3 \ln x + o(x^3 \ln x) \sim \frac{1}{3} x^3 \ln x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \ln \tg x - \tg x \ln x &= x \ln(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) - (x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) \ln x = \\ &= x \ln(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)) - (\frac{x^3}{3} + o(x^3)) \ln x = \\ &= \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \frac{1}{3} x^3 \ln x + o(x^3 \ln x) \sim -\frac{1}{3} x^3 \ln x, \end{aligned}$$

то

$$A = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x \ln \arctg x - \arctg x \ln x}{x \ln \tg x - \tg x \ln x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{3} x^3 \ln x}{-\frac{1}{3} x^3 \ln x} = -1. \blacktriangleright$$

Ответ: -1.

4. В прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной c , вписана окружность. Какие значения может принимать ее длина?

◀ Пусть x и y – катеты треугольника, а r – радиус вписанной окружности. Тогда $x + y - 2r = c$. Будем рассматривать длину $l(x)$ окружности как функцию аргумента x :

$$l(x) = 2\pi r = \pi(x + \sqrt{c^2 - x^2} - c).$$

Так как $l'(x) = \pi \frac{\sqrt{c^2 - x^2} - x}{\sqrt{c^2 - x^2}}$, то $l'(x) > 0$ при $0 < x < c/\sqrt{2}$,

$l'(x) < 0$ при $c/\sqrt{2} < x < \infty$. Следовательно, наибольшее значение $l(x)$,

равное $\pi c(\sqrt{2}-1)$, принимает при $x=c/\sqrt{2}$. Поскольку $l(+0)=0$, то по теореме Коши множество возможных значений длины вписанной окружности – промежуток $(0, \pi c(\sqrt{2}-1)]$. ►

Ответ: Все значения из промежутка $(0, \pi c(\sqrt{2}-1)]$.

5. Сколько различных корней имеет уравнение $z^3 + \bar{z} - 10 = 0$, где $z \in \mathbb{C}$, \bar{z} – комплексное число, сопряженное z ?

◀ Если $z = x + iy$, то уравнение имеет вид

$$(x + iy)^3 + (x - iy) - 10 = 0 \text{ или } x^3 - 3xy^2 + x - 10 + i(3x^2y - y^3 - y) = 0.$$

Оно равносильно системе уравнений

$$x^3 - 3xy^2 + x - 10 = 0, \quad y(3x^2 - y^2 - 1) = 0.$$

Если во втором уравнении системы $y = 0$, то из первого уравнения $x^3 + x - 10 = (x - 2)(x^2 + 2x + 2) = 0$ и $x = 2$. Поэтому $z_1 = 2$ – корень уравнения.

Если во втором уравнении системы $y^2 = 3x^2 - 1$, то из первого уравнения $x^3 - 3x(3x^2 - 1) + x - 10 = 0$, $f(x) = 4x^3 - 2x + 5 = 0$.

Функция f имеет точку максимума $x = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ и точку минимума $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Так как $f(-1) > 0$, $f(\frac{1}{\sqrt{6}}) = \frac{4}{6\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}} + 5 > 0$, то f имеет единственный нуль $x_0 < -1$. Следовательно, уравнение имеет еще два корня $z_{2,3} = x_0 \pm i\sqrt{3x_0^2 - 1}$. ►

Ответ: уравнение имеет три корня.

6. Точка (x_0, y_0) на линии, задаваемой уравнением $u(x, y) = 0$, называется особой, если $\text{grad} u(x_0, y_0) = \vec{0}$. Доказать, что на линии

$$x^4 + y^2 - xy - x - 3 = 0$$

нет особых точек.

$$\begin{aligned} \left\langle \text{grad} u(x, y) = \vec{0} \right\rangle &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - y - 1 = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -x + 2y = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varphi(y) = 32y^3 - y - 1 = 0. \end{aligned}$$

Так как $\varphi(y)$ возрастает на промежутках $(-\infty, -1/\sqrt{96}]$ и $[1/\sqrt{96}, \infty)$, убывает на промежутке $[-1/\sqrt{96}, 1/\sqrt{96}]$, а $\varphi(-1/96\sqrt{96}) < 0$,

то $\varphi(y) < 0$ для всех $y \leq 0$. Так как $\varphi(1/2) > 0$, то $\varphi(y) = 0 \Rightarrow 0 < y < 1/2$, $0 < x = 2y < 1 \Rightarrow x^4 + y^2 - xy - x - 3 < 1 + 1/4 - 3 < 0$. Следовательно, равенства $u(x, y) = 0$ и $\text{grad} u(x, y) = 0$ несовместны. ►

7. Найти предел последовательности

$$a_n = \int_0^1 4^{nx} x^n (1-x)^n dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

◀ Так как для любого $x \in [0, 1]$ $0 \leq x(1-x) \leq 1/4$, то для любого $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \int_0^1 4^{nx} x^n (1-x)^n dx \leq \frac{1}{4^n} \int_0^1 4^{nx} dx = \frac{4^n - 1}{n 4^n \ln 4} < \frac{1}{n}.$$

А поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, то и $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 4^{nx} x^n (1-x)^n dx = 0$. ►

Ответ: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

8. Найти решение $y(x)$ дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{y}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{y}{x} \right),$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 0$, $\frac{dy}{dx}(1) = -\frac{3}{2}$.

◀ Сделаем замену $z = \frac{y}{x}$, $y = xz$. Получим уравнение $xz'' + 2z' = zz'$. Перепишем его в виде $(xz' - \frac{1}{2}z^2 + z)' = 0$. Оно равносильно уравнению $xz' - \frac{1}{2}z^2 + z = C$. Из начальных условий для $y(x)$ получаем начальные условия для $z(x)$:

$$z(1) = \frac{y(1)}{1} = 0, \quad z'(1) = \frac{y'(1)x - y(x)}{x^2} \Big|_{x=1} = -\frac{3}{2}.$$

Поэтому $C = -\frac{3}{2}$, $xz' - \frac{1}{2}z^2 + z = -\frac{3}{2}$, $z' = \frac{z^2 - 2z - 3}{2x}$.

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Ищем его решение, удовлетворяющее начальному условию $z(1) = 0$:

$$\int_0^{z=z(x)} \frac{4}{z^2 - 2z - 3} dz = 2 \int_1^x \frac{dx}{x}, \quad \ln \frac{3-z}{z+1} - \ln 3 = 2 \ln x, \quad \frac{3-z}{3z+3} = x^2, \quad z = \frac{3(1-x^2)}{3x^2+1}.$$

Соответственно, $y(x) = \frac{3x(1-x^2)}{3x^2+1}$, $x \in (0, \infty)$. ►

Ответ. $y(x) = \frac{3x(1-x^2)}{3x^2+1}$, $x \in (0, \infty)$.

9. Найти сумму $s(x)$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^k x}{\int_0^1 \ln^k x dx}$.

◀ Обозначим $I_k := \int_0^1 \ln^k x dx$. Интегрируя по частям, имеем

$$I_k = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \ln^k x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (-\varepsilon \ln^k \varepsilon - k \int_{\varepsilon}^1 \ln^{k-1} x dx) =$$

$$= -k \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \ln^{k-1} x dx = -k I_{k-1}.$$

По индукции получаем $I_k = (-1)^k k! I_0 = (-1)^k k!$. Теперь для любого $x \in (0, \infty)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^k x}{\int_0^1 \ln^k x dx} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln^k x}{k!} = e^{-\ln x} - 1 = \frac{1}{x} - 1. \blacktriangleright$$

Ответ: $s(x) = \frac{1}{x} - 1$, $x \in (0, \infty)$.

10. Сходится ли ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, где $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ и

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{u_0 u_1 + u_1 u_2 + \dots + u_{n-1} u_n} ?$$

◀ Если ряд сходится, то $u_n \rightarrow 0$ и потому $\exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < M$.

Так как $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$ и $u_{n+1} \rightarrow 0$, то $u_0 u_1 + u_1 u_2 + \dots + u_{n-1} u_n \rightarrow +\infty$. Тогда

$$u_0 u_1 + u_1 u_2 + \dots + u_{n-1} u_n < M(u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}),$$

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} > (u_0 u_1 + u_1 u_2 + \dots + u_{n-1} u_n) / M.$$

Поэтому $u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} \rightarrow \infty$, то есть ряд расходится. Получили противоречие. Следовательно, предположение неверно и ряд расходится. ►

Ответ: ряд расходится.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Оленикова Ю.К.* Задания и итоги Всероссийской студенческой олимпиады по математике 2021 года / Ю.К. Оленикова, В.Ш. Ройтенберг // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 17. Ярославль, Изд-во ЯГТУ. 2022. С. 88-95.
2. *Оленикова Ю.К.* Анализ результатов Всероссийской студенческой олимпиады по математике 2022 года / Ю.К. Оленикова, В.Ш. Ройтенберг // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 18. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2023. С. 86–92.
3. *Оленикова Ю.К.* Задания и результаты всероссийской студенческой олимпиады по математике 2024 года / Ю.К. Оленикова, В.Ш. Ройтенберг // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 20. Ярославль, Изд-во ЯГТУ. 2025. С. 76-85.

УДК 51:37.016

О. В. Панишева

Луганский государственный педагогический университет
Россия, г. Луганск, e-mail: Panisheva-ov@mail.ru

**СТАНОВЛЕНИЕ ОТЕЧЕСТВЕННОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕРМИНОЛОГИИ:
ИСТОРИЧЕСКИЙ И ДИДАКТИЧЕСКИЙ АСПЕКТЫ**

Автор исследует процесс формирования отечественной математической терминологии в контексте современных дискуссий о языковом пуризме. На материале трудов русских ученых показано, что исторически сложилась практика «двойной номенклатуры», сочетающей международные и национальные элементы. Автор обращает внимание на образовательный потенциал использования истории славянской математической терминологии, предлагает конкретные формы использования этого материала в школьном обучении: проектная деятельность, создание словарей забытых терминов, разработка творческих заданий, что способствует лучшему пониманию математических концепций и расширению общекультурного кругозора учащихся.

Ключевые слова: математическая терминология, терминологический пуризм, история математики, дидактика, межпредметные связи, лингвистика

O. V. Panisheva

Lugansk State Pedagogical University
Russia, Lugansk, e-mail: Panisheva-ov@mail.ru

**THE FORMATION OF NATIONAL MATHEMATICAL
TERMINOLOGY: HISTORICAL AND DIDACTIC ASPECTS**

The author explores the process of the formation of national mathematical terminology in the context of modern discussions on linguistic purism. Based on the works of Russian scholars, it is shown that a practice of «dual nomenclature» historically developed, combining international and national elements. The author draws attention to the educational potential of using the history of Slavic mathematical terminology and suggests specific forms of incorporating this material into school education: project activities, creating dictionaries of forgotten terms, developing creative tasks. This contributes to a better understanding of mathematical concepts and broadens the students' general cultural horizons.

Keywords: mathematical terminology, terminological purism, history of mathematics, didactics, interdisciplinary connections, linguistics

После принятия Государственной думой законопроекта № 468229-8 о защите русского языка в публичном пространстве (17.06.25), на государственном уровне ведется речь об исключении из оборота англоязычных и прочих заимствованных терминов, становится актуальным обращение к истокам формирования научных терминов, большинство которых носит заимствованный характер.

Вопросы особенностей формирования математической терминологии часто изучаются лингвистами. Такие исследования находим в работах О. Шапкиной, которая сделала сравнительный анализ лингвистических особенностей формирования математических терминов в русском и английском языках, С. Шукуровой, сравнивающей русскоязычную терминологию с таджикской, С. Усеинова, анализирующего крымско-татарскую математическую терминологию, Д. Дятко, Т. Сухой, рассматривающих математические термины на белорусском языке и др. Становление русской математической терминологии рассмотрено в работах Н. Александровой, Ш. Миттала, Л. Кутииной, Р. Мельниковой, Д. Руднева и др. В педагогических исследованиях основное внимание уделяется методическим аспектам освоения математической терминологии на разных образовательных уровнях, вклад отдельных ученых в становление математической терминологии.

Вопрос о том, является ли необходимым переход от заимствованной терминологии к национальной, является дискуссионным. Так, многие ученые утверждают, что заимствования обогащают научную лексику, ведут к усовершенствованию научного языка, являются одним из источников пополнения словарного запаса [1], другие же считают, что заимствования нарушают словообразование в национальном языке.

Среди ученых встречаются и те, которые предпочитают терминологический пуризм, стремясь к очищению литературного языка от иноязычных заимствований и новообразований [2], замене чужеродных элементов на слова, которые строятся на законах родного языка.

Попытки заменить встречающиеся латинизмы в математике на славянизмы предпринимались еще в 80-х годах XVIII века, когда преподаватели П. Суворов и В. Никитин предложили обширные списки замен, которые так и не прижились в науке. Позже исследователи назвали такие попытки лингвистическим анекдотом [5, с. 78], поэтому вряд ли стоит повторять такие действия спустя два с половиной века. Особенно это касается математики, большинство терминов которой являются интернациональными и имеют иноязычное происхождение – греческое, латинское, европейское и арабское. Мы придерживаемся мнения, что полный отказ от интернационализма невозможен без ущерба для развития науки. Терминологический пуризм будет лишь тормозить развитие отечественной математики, которая не может существовать без обращения к международному

опыту и представления собственных достижений на международных площадках.

Однако знакомство с историей возникновения математических терминов приносит несомненную пользу в обучении математике, так как показывает ее в развитии, становлении в разные исторические периоды на разных исторических территориях.

Цель исследования – рассмотреть отечественные варианты математических терминов как свидетельство о становлении общепринятых современных названий, выявить российских научных деятелей, которые внесли значительный вклад в становление отечественной математической терминологии, обосновать образовательное значение знакомства школьников с историей становления математической терминологии.

Математический терминологический аппарат преимущественно имеет латинское и греческое происхождение. Арабские термины вошли в русскую науку опосредованно, но они также достаточно широко представлены в математике. Так, арабизмами являются термины «алгоритм», «алгебра», «цифра», «шифр» [8].

При этом в лексике математики присутствуют и слова славянского происхождения, знакомство с которыми представляет значительный образовательный интерес. Обратимся к истории возникновения этих терминов.

Как отмечает Л. Кутина, становление отечественной терминологии арифметики и геометрии в основном состоялось в первой трети XVIII века [5, с. 78]. Попытки отыскать русскоязычные аналоги предпринимались относительно почти каждого существующего на тот момент термина. Некоторые вновь созданные переводы имели недолгий срок жизни в математике (например, лоно – синус, водоравный – горизонтальный, струна – хорда и др.), другие же мы используем в математическом языке до сих пор (например, числитель, дуга, площадь и др.) [5, с. 79].

Основателем русской математической терминологии можно считать автора первого печатного учебника, изданного в 1703 году – Л.Ф. Магницкого. В его «Арифметике» впервые в русском языке появляются слова «множитель», «делитель», «дробь», «произведение», «миллион», которые мы используем в математике по сей день.

Встречается в «Арифметике» Леонтия Магницкого и необычная терминология, которая употреблялась в учебниках математики вплоть до конца XVIII века. К примеру, все числа первого десятка он называет перстами; десятки, сотни и т.д., «круглые» числа вида 30, 500 – суставами, все остальные числа – сочинениями. Значащие цифры Магницкий называет «знаменованиями» в отличие от нуля, который зовется цифрой [6]. Присутствие таких названий в учебнике свидетельствует о достаточно длинном историческом этапе пальцевого счета в истории человечества.

«Арифметика» написана на основе анализа очень многих иноязычных изданий, на что автор обращает внимание в ее предисловии: «Собрахом сию науку арифметику из многих разноязычных книг греческих, латинских, немецких и старопереводных славенских» [6]. Поэтому наряду с иноязычной терминологией Л. Магницкий предлагает свою, русскую. Так, он одновременно употребляет латинские термины и их русские синонимы: нумерацию, или счисление; аддицию, или сложение; субстракцию, или вычитание; дивизию, или деление, аббревацию, или сокращение (дробей). Пропорции Магницкий называет их русскоязычными аналогами – «подобствами», дроби – долями или ломаными числами, корни – радиками, заимствуя термин из латинского. Л. Магницкий впервые вводит термин прогрессия, снабдив его русским толкованием: «прогрессию» – шествование (от лат. *progressio* – движение вперед), но предпочитает употреблять именно латинизированную форму этого термина [5, с. 27]. Говоря о возрастающих и убывающих прогрессиях автор «Арифметики» употребляет термины «примножительные» и «умалительные».

Впервые знакомя русского читателя с десятичными дробями, Магницкий употребляет термин «децималь» (как калька с европейского языка) и десятная.

Значительно меньше славянских терминов в геометрии. Как аналог современного термина «стереометрия», Магницкий употребляет «солидометрия», объединяя греческое и латинское звучание. Уже позже этому разделу геометрии был дан чисто русский перевод – толстомерие или плотномерие. В значении слова «круг» у Магницкого встречаем «колесо», происходящее от украинского «коло», параллельные прямые он называет равноразстоящими, сторона фигуры называется ее боком (например, бок треугольника) [6].

В истории математики были неоднократные попытки ввести в научный язык славянские аналоги греческих и латинских названий фигур. Славянское название обычно давало конкретно-образное представление о фигуре. Например, конус называли шишкой или заостренным караваем, эллипс – яичным кругом, шар – глобусом, цилиндр – круглым столпом или валом [5, с. 49]. Эти названия просуществовали недолго и в конце концов названия геометрических тел вошли в отечественную математику в их интернациональном варианте.

В последующих русских математических изданиях мы также видим замену иностранных терминов славянскими. Например, уже на первой странице учебника «Приемы циркуля и линейки» (1725 г.) [7] замечаем, как автор сразу спешит пояснить греческий термин «геометрия»: «на русском же языке есть оное землемерие и художество поля измеряти» [там же].

В этом же учебнике встречаются такие славянские синонимы для геометрических терминов: «точка» – «пункт», «плоскость» – плоская сурперфия (латинизированное) или наружность (русское), эллипсоид автор описывает как «сфероид или раздавленный глобус изображает подлинное яйцо», а конус сравнивается с заостренным караваем, аксиомы называются «общественные знаемости» [7].

Такие замены иноязычных математических слов сопровождались наличием большого числа синонимов у вновь сформулированного славянского термина. Поэтому часто один славянский термин имеет свои греческие или латинские синонимы, имеются синонимы среди старинных и средневековых вариантов слова и даже среди терминологии, возникшей в одной месте и одном временном пласте. Например, плоскость, поверхность, равнина, верховность; основание, исход, подошва.

Многие математические термины были внесены в русскоязычную математику М.В. Ломоносовым, которого называют мастером славянизации иностранных терминов. Так, ему мы обязаны появлением в русскоязычной математике терминов «минус», «формула», «диаметр», «радиус», «квадрат» и др.

Активным сторонником лингвистического пуризма был В.И. Даль. В его словаре можно встретить многие математические термины и их исконно русские синонимы. Анализ его толкового словаря приводит к интересным находкам. Так, объясняя термины «гипербола», «парабола», «эллипс», автор использует интересное название конуса – «сахарная голова». Для того чтобы понять происхождение такого названия, нужно иметь в виду, что в дореволюционной Руси сахарной головой называли слиток сахара, который получался в виде застывания сахарной массы в специальных формах, имеющих форму конуса.

«Гипербола – кривая линия, которая бы обозначилась на поверхности сахарной головы (конуса), если ее рассечь с боку, отвесно вдоль). Парабола – разрез сахарной головы накось, опостен (параллельно) противной стороне. Эллипс – должокруг: замкнутая кривая, которая образуется при косом рассечении конуса» [4]. Таким образом, Даль дает определение этим линиям как коническим сечениям, а не как графикам функции, которое является общепринятым в современных учебниках математики.

Описывая значения термина «гипотенуза», В.И. Даль приводит такие ее славянские синонимы, как долонь, косыня. Синонимами термина «логика» называются здравомыслие и умословие, деление без остатка называется подцело, гладко, прогрессию В.И. Даль называет математической лестницей [4].

Особый интерес представляет трактовка В.И. Далем геометрических понятий, в которой сочетается лингвистический пуризм и попытка систематизации. Так, центр круга он определяет через исконно русское понятие

«средоточие», определяя круг как «окружность, сомкнутую кривую черту, всюду равно удаленную от средоточия». Интересная попытка автора показать математическую аналогию при увеличении числа измерений. Так, говоря о том же круге, Даль пишет так: круг, в первом значении, т.е. один обвод его называют окружностью; во втором, т.е. площадь, кругом; в третьем, т.е. тело (напр. круг воска, сыра), цилиндром. Подчеркивается, что кругом называли любые круглые тела, что не соответствует современному употреблению этого термина в математике. У Даля присутствует бытовое, донаучное понимание круга, при котором не различают формы цилиндра и шара.

Современный словарь математических терминов определяет логарифм как показатель степени, в которую нужно возвести основание a , чтобы получить степень b [2, с. 48]. В описании В. Далема этого термина показывается история возникновения этого понятия в математике. Так, В. Даль, объясняя что такое логарифм, пишет: «Если под рядом чисел геометрической прогрессии (лествицы) выставить ряд отвечающих им чисел арифметической прогрессии, то каждое из последних будет логарифмом дружки своей, в первом порядке; сим способом умножение обращают в сложение, деление в вычитанье, что и облегчает выкладки» [4].

Как видим, не все попытки славянизировать математическую терминологию привели к успеху. Даже сами создатели отечественной математической терминологии используют в своих произведениях двойную номенклатуру – интернациональную и национальную (точка и пункт, черта и линия, корпус и геометрическое тело, триангул и треугольник, периметр и обвод и пр.), что подчеркивает двойственную природу научного языка, балансирующего между национальной традицией и международной коммуникацией. Этот исторический опыт особенно актуален сегодня, когда российская наука вновь стоит перед необходимостью балансировать между интеграцией в мировое научное пространство и развитием национальной терминологической традиции.

Рассмотрим дидактический потенциал изучения становления отечественной математической терминологии.

Сравнение исторических и современных терминов становится прекрасным материалом для организации проектной и исследовательской деятельности. Школьникам можно предложить следующие задания:

- исследовать, почему одни славянские термины прижились («числитель», «площадь»), а другие остались лишь историческим курьезом;
- создать «Словарь забытых математических слов» с объяснением их происхождения;
- создать собственные русскоязычные термины, соответствующие современным общепринятым.

Работа с такой терминологией способствует формированию метапредметных компетенций школьников. Увидев историческую ретроспективу становления понятия, школьники воочию убеждаются, что математика – живая, развивающаяся наука, а не свод раз и навсегда заданных догм, постигают закономерности развития научного знания. Сравнивая старинные и современные названия одного и того же понятия, ученик знакомится с культурным многообразием человечества, учится видеть взаимосвязь между научным и бытовым знанием.

Часто звучание математических терминов на славянском языке указывает на их происхождение, связь с практической деятельностью человека или повседневной действительностью, поэтому они раскрывают смысл понятий больше, чем интернациональные, чем способствуют лучшему пониманию математических концепций и реализации принципа практической направленности в обучении математике. В отличие от интернациональных терминов, чья этимология часто скрыта для носителя языка, такие названия, как «заостренный каравай» (конус) или «толстомерие» (стереометрия), непосредственно апеллируют к предметной области и создают яркий визуальный образ, активизируют предметные ассоциации. Термины, взятые из естественного языка (например, «бок» треугольника вместо «сторона»), снижают первоначальный когнитивный барьер и могут быть использованы без дополнительных разъяснений, что особенно ценно на начальном этапе знакомства с математическими понятиями, способствуя их интуитивному пониманию и усвоению.

Помимо использования на уроке, математическая терминология славянского происхождения открывает широкие возможности для организации внеклассной работы, направленной на развитие метапредметных навыков и повышение мотивации к изучению предмета.

В одной из тематических интеллектуальных игр можно, например, предложить задание «Найди пару», в котором участникам на скорость предлагается соотнести исторические славянские термины («косыня», «долгокруг», «средоточие», «лествица») с их современными математическими эквивалентами (гипотенуза, стереометрия, центр, прогрессия). Поскольку многие славянские аналоги, такие как «заостренный каравай» (конус) или «шишка» (конус), обладают прозрачной внутренней формой и опираются на бытовой опыт, предварительная подготовка зачастую не требуется. Это делает конкурс динамичным и зрелищным, позволяя участникам опереться не на заученные знания, а на языковую и математическую интуицию, что способствует развитию гибкости мышления.

Данный материал органично вписывается в содержание математических вечеров или недель науки, посвященных наследию отечественных ученых: Л. Магницкого, М. Ломоносова, Л. Эйлера, В. Даля. В рамках таких мероприятий уместно проводить инсценировки, основанные на фраг-

ментах их трудов, где используются как исторические, так и современные термины. Это наглядно демонстрирует процесс становления научного языка.

Систематическая работа в этом направлении, выходящая за рамки учебника, решает важные воспитательные задачи. Знакомство с вкладом русских ученых в формирование языка математики способствует воспитанию уважения к интеллектуальному труду, формированию чувства патриотизма и гордости за достижения отечественной научной мысли. Обращение к историческим терминологическим пластам позволяет не только обогатить учебный процесс, но и укреплять связь между поколениями, формируя ценностное отношение к истории отечественной науки и родному языку.

Таким образом, исторические славянские термины представляют собой не просто лингвистический курьез, а полноценный дидактический ресурс, грамотное использование которого позволяет сделать обучение математике более осмысленным, наглядным и соответствующим современным требованиям к образовательным результатам. Они могут стать ценным материалом для реализации практико-ориентированного подхода и установления межпредметных связей. Погружение в историю возникновения математических терминов значительно обогащает учебный процесс, расширяет общекультурный кругозор школьников, способствует пополнению их словарного запаса, позволяет демонстрировать вклад отечественных творцов математики в ее становление.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Анисимова Г.Д.* Заимствование как способ обогащения лексики (на основе математической и компьютерной терминологии) / Г.Д. Анисимова, Б.Н. Шаталов // Материалы III Международной молодежной научно-практической конференции «Язык науки и техники в современном мире». (Омск, 15 апреля 2014 г.). ОмГТУ: Омский государственный технический университет, 2014. С. 20-22.
2. *Беликова Г.И.* Толковый и этимологический словарь математических терминов и понятий: учебное пособие / Г.И. Беликова, Е.А. Бровкина, И.В. Зайцева; СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2025.
3. Большая Российская энциклопедия. URL: <https://old.bigenc.ru/linguistics/text/3173318?ysclid=mfp0o7rbkr76525540> (дата обращения 30.09.2025)
4. *Даль В.И.* Толковый словарь живого великорусского языка. URL: https://voteto.ru/mt/matematicheskiyi_termin (дата обращения 29.10.2025)
5. *Кутина Л.Л.* Формирование языка русской науки: (Терминология математики, астрономии, географии в первой трети XVIII в.) / Акад. наук СССР. Ин-т рус. яз. Москва; Ленинград: Наука. [Ленингр. отд-ние], 1964. 219 с.
6. *Магницкий Л.Ф.* Арифметика. URL: <https://viewer.rusneb.ru/> (дата обращения 5.11.2025)
7. Приемы циркуля и линейки. URL: <https://archive.org/details/340C624641CE76449DF/page/n3/mode/2up> (дата обращения 4.11.2025)
8. *Хайдарова С.М.* Происхождение некоторых математических терминов в современном русском языке // Актуальные тенденции и инновации в развитии российской науки: сб. науч. ст. / Науч. ред. В.И. Спирина. М., 2019. С. 146-148.

УДК 51-8:378

В. Р. Сапогов

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: sapogovvr@ystu.ru

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ТЕОРИИ ИГР В ПРОФОРИЕНТАЦИОННОЙ РАБОТЕ

В работе обсуждается актуальность использования теории игр при профориентационной работе со школьниками. Представлены задачи, вызывающие наибольшую заинтересованность аудитории.

Ключевые слова: теория игр, стратегия, образование

V. R. Sapogov

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: sapogovvr@ystu.ru

ON THE USE OF GAME THEORY IN CAREER GUIDANCE WORK

The paper discusses the relevance of using game theory in career guidance work with schoolchildren. The tasks that generate the greatest interest among the audience are presented.

Keywords: game theory, strategy, education

В настоящее время перед образованием стоит много задач, одной из которых является мотивирование абитуриентов, окончивших школу, к дальнейшему обучению. Для этого используются разнообразные подходы: профориентационные мероприятия с участием студентов, конкурсы, олимпиады, дни открытых дверей и многое другое. Одним из хороших инструментов увлечения учеников техническими дисциплинами является теория игр.

Теория игр – раздел математики, который исследует системы взаимодействия сторон, преследующих свои личные интересы. Игрой мы называем не только детскую забаву, но и любое взаимодействие между соперниками и союзниками: политика, экономика, любовная пара, семья и т.д.

Для молодого поколения игры – это целый мир. Возможность создавать игры привлекает аудиторию, поэтому связь между наукой и хобби может стать ключом к вовлечению аудитории в процесс изучения матема-

тики. Цель профориентационной работы заключается не только в привлечении аудитории в университет, но и в том, чтобы привить абитуриентам интерес к обучению и получению образования.

На базе ЯГТУ автором были проведены две встречи со школьниками, в ходе которых использовались элементы теории игр. Первая группа состояла из детей 10-14 лет, вторая группа – 16-18 лет. Обе группы были очень заинтересованы разными сюжетами из теории игр, которые позволяли зафиксировать важные элементы любой игры. Встречи стартовали с разбора бытовых ситуаций, которые каждому встречались в повседневной жизни – это позволяло вовлечь аудиторию в процесс знакомства с теорией игр. После разбирались более сложные сюжеты, за которыми ученики могли видеть применимость математики. Рассмотрим задачи, вызвавшие наибольший интерес у аудитории.

1. *Парадокс убитого дедушки.* Парадокс заключается в том, что человек А, умеющий путешествовать во времени, отправляется в прошлое, где убивает своего дедушку. Из этого следует, что дедушка не встречает супругу-бабушку, не заводит семью, а значит, и не рождается человек А. Но если он не рождается, то он не отправляется в прошлое, дедушка остается живым, заводит семью и тем самым рождается человек А. Парадокс понятен детям любого возраста. Он учит тому, что в любой игре есть правила. В нашем мире нет возможности путешествовать назад во времени, а следовательно, и парадокса никакого нет.

2. *Русская рулетка посложнее.* Обычная русская рулетка известна всем. В одно из шести гнезд барабана револьвера заряжается снаряд, вращается барабан и делается выстрел в голову (рис. 1). Задача – выжить. Всем понятно, что вероятность выигрыша составляет $5/6$. Но если зарядить не один снаряд, а два, и сделать два выстрела подряд... Есть ли разница в стратегии зарядки?

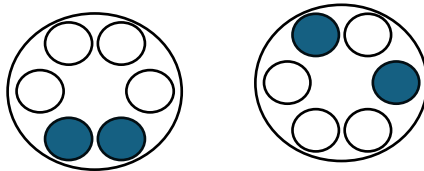


Рис. 1. Варианты зарядки револьвера двумя снарядами

Малая часть учеников, участвовавших во встречах, заметили существенную разницу между двумя случаями. В первом способе благоприятные 3 гнезда, с которых можно начинать пальбу и остаться в живых, а вот во втором – лишь 2. Отсюда и существенная разница в вероятность остаться

ся живым: $\frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$, или 16,6%, в вопросе выживания – колоссальная раз-ница, которая появляется из неочевидного действия – разная зарядка одно-го и того же револьвера теми же снарядами. Эта загадка учит тому, что не всё бывает очевидным и в задаче необходимо исследовать систему, а не примерять на глазок лучший вариант.

3. *Парадокс Браеса* [1]. Заключается в том, что добавление допол-нительных мощностей в систему может привести к уменьшению ее рабо-тоспособности. Примером может служить следующий мысленный экспе-римент. На рис. 2 представлена транспортная сеть. Дороги 1 и 2 узкие, по-этому их пропускная способность зависит от количества машин: 100 ма-шин в минуту. Дороги 3 и 4 невероятно широкие, поэтому независимо от количества машин путь по ним занимает 25 минут.

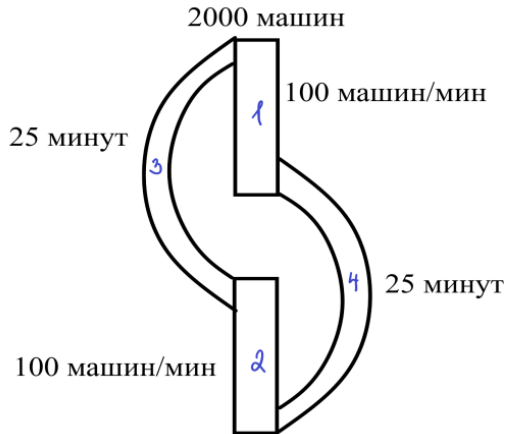


Рис. 2. Транспортная сеть

На въезде в систему находится 2000 машин. Спустя продолжитель-ное время машины распределяться поровну: 1000 машин сразу поедет по дороге 3 и потом доедет до финиша по дороге 2, затратив на это $25 + \frac{1000}{100} = 35$ минут. Другая 1000 машин сначала поедет по дороге 1, а потом доберется до финиша по дороге 4, затратив те же 35 минут. Аудитори-и предлагается вопрос: «Можно ли как-то улучшить ситуацию? Умень-шить время в пути?». Многие предлагают соединить дороги 1 и 2 широким участком (рис. 3).

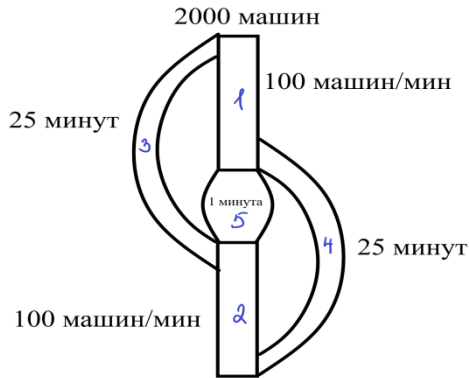


Рис. 3. Модифицированная транспортная сеть

Очевидное действие приводит к неочевидным последствиям. Водитель, понимая, что нет смысла делать объезд на 25 минут, ведь можно проехать по дороге 1, время на которой по старому опыту составляет 10 минут, потом 1 минуту по дороге 5 и еще 10 минут по дороге 2. Но когда так думают все водители, то ситуация сильно меняется: дороги 1 и 2 оказываются перегруженными и время на путь на них теперь составляет $\frac{2000}{100} = 20$ минут. Таким образом время пути по дорогам 1, 5 и 2 составит $20+1+20=41$ минуту. Все водители проиграли при введении новой дороги, которая была призвана сократить время в пути.

4. Игра «Предай или сотрудничай» [4] (рис. 4). Выбор дается каждому: **предать** или **сотрудничать**, без своевременного сговора.

Если оба выбрали сотрудничество, то каждому дают 3 конфетки.

Если один выбрал сотрудничество, а другой предал, то первый получает 0 конфеток, а предавший получает 5 конфеток.

Если оба предали, то оба получают по 1 конфетке.

Спустя небольшое количество игр (5-7), аудитория понимает, что доверять очень сложно. Каждый боится довериться даже собственному другу, поэтому все предают, тем самым, обеспечивая себе минимум 1 конфетку. Эта игра отражает взаимодействие сторон, которым было бы выгоднее быть союзниками, а не противниками, но без сговора большая часть не готова рисковать. Спустя большое количество игр (20+) аудитория начинает быть «доброй», и все начинают сотрудничать, потому что до этого были попытки сотрудничества, которые разбивались о предательство. Но вскоре игроки понимают, что получать по 1 конфетке менее выгодно, чем рискнуть получить 3 или 0. Данная игра вызывает бурю эмоций у

игроков и способствует сплочению даже незнакомого коллектива. Бывшие враги становятся друзьями, потому что это выгодно.

	Первый предал	Первый сотрудничает
Второй предал	<i>1 монетку каждому</i>	<i>Второму 5 монеток, первому – ничего</i>
Второй сотрудничает	<i>Первому 5 монеток, второму – ничего</i>	<i>Оба получают по 3 монетки</i>

Рис. 1. Игра «Предай или сотрудничай»

Использование теории игр в профориентационной работе со школьниками – беспроигрышный вариант зацепить аудиторию и вовлечь ее в математику, а также показать, что технические науки – это не набор формул и строгих правил, а прежде всего анализ ситуации и понятный расчет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung. URL: <https://homepage.ruhr-unibochum.de/Dietrich.Braess/paradox.pdf>
2. *Axelrod R. The evolution of cooperation / R. Axelrod, W. Hamilton // Science. 1981. Vol. 211, no. 4489 P. 1390-1396.*

УДК 51:378

А. В. Соколов, И. Е. Шемякина

Военная академия связи им. Маршала Советского Союза С.М. Будённого
Россия, г. Санкт-Петербург, e-mail: avs_avs@rambler.ru, www.iri@mail.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕЙТИНГОВОГО МЕТОДА ОЦЕНКИ ПРИ ОТБОРЕ УЧАСТНИКОВ В ОЛИМПИАДНОМ ДВИЖЕНИИ

Рассмотрен способ рейтингового оценивания членов сборной команды военного вуза по математике, нивелирующий отставание в обычном рейтинге по сумме баллов у курсантов, пропустивших по уважительным причинам некоторые олимпиады, контрольные работы и рубежные контроли. Предлагаемую рейтинговую оценку рекомендуем использовать для объективного анализа итогов работы членов сборных команд не только по математике, но и по дисциплинам, представляющим участников в олимпиадном движении.

Ключевые слова: предметная олимпиада, рейтинговая оценка, курсанты

A. V. Sokolov, I. E. Shemykina

Military Academy of Communications
named after Marshal of the Soviet Union S.M. Budyonny
Russia, St. Petersburg, e-mail: avs_avs@rambler.ru, www.iri@mail.ru

USING THE RATING METHOD OF ASSESSMENT IN SELECTION OF PARTICIPANTS IN THE OLYMPIAD MOVEMENT

The article discusses a method for rating evaluation of members of a military university national team in mathematics, leveling the lag in the usual rating by the sum of points of cadets who missed some Olympiads, tests and midterm controls for valid reasons. The proposed rating assessment can naturally be called average efficiency and we recommend using it for an objective analysis of the results of the work of members of national teams not only in mathematics, but also in the disciplines represented by participants in the Olympiad movement.

Keywords: subject Olympiad, rating assessment, cadets

Образование в военных вузах РФ направлено на подготовку военных специалистов, в том числе и в области инженерии. Авторы обращают внимание на необходимость совершенствования учебной деятельности и качества подготовки курсантов по дисциплинам кафедры естественно-

научных и общепрофессиональных дисциплин [1, с. 25-29]. Трудно переоценить роль предметных олимпиад и, в частности, олимпиад по математике [2–6] в подготовке будущих специалистов: олимпиады пробуждают у участников интерес к соответствующим предметам и развивают творческое нестандартное мышление, в процессе подготовки изучаются дополнительные разделы дисциплин, не входящие в стандартную программу. Современные образовательные технологии, рассмотренные авторами [7, с. 106-110], в том числе и педагогические технологии когнитивного инструктирования способствуют личностно-развивающему обучению в вузах [8, с. 32].

При подготовке к олимпиадам у руководителей команд время от времени возникает потребность в подведении итогов для того, чтобы отбирать наиболее сильных членов команд для участия в тех или иных олимпиадах и отсеивать наиболее слабых. При этом важную роль играет объективная рейтинговая оценка, позволяющая сделать правильный выбор [1, с. 25-29].

Предположим, что команда состоит из m членов, за некоторый период времени (например, семестр или учебный год) команда приняла участие в n мероприятиях (олимпиадах, контрольных работах, рубежных контролях) и i -тый член команды в j -том из этих мероприятий набрал N_{ij} баллов, $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. Тогда в качестве рейтинговой оценки i -го члена команды обычно берут величину

$$R_i = \sum_{j=1}^n N_{ij}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Но как быть, если один из членов команды по уважительной причине пропустил одно или несколько мероприятий и его рейтинг R_i оказался по этой причине заметно ниже, чем у его товарищей, хотя реально этот член команды находится в хорошей форме и нисколько не уступает по способностям своим товарищам? Можно ли найти другую объективную рейтинговую оценку, которая нивелировала бы случайные пропуски мероприятий?

Возникнувшую проблему решили, используя вместо R_i среднюю эффективность

$$a_{i \text{ ср}} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^n \frac{N_{ij}}{\max_i N_{ij}}, \quad i = 1, \dots, m.$$

где $\max_i N_{ij}$ – лучший из результатов членов команды на j -том отчетном мероприятии, $j = 1, \dots, n$;

$a_{ij} = N_{ij} / \max_i N_{ij}$ – эффективность i -го члена команды на j -том отчетном мероприятии, $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$;

n_i – количество отчетных мероприятий, в которых принял участие i -тый член команды, $i = 1, \dots, m$.

Пример использования эффективности и средней эффективности при подведении итогов работы сборной команды военного вуза по математике за учебный год приведён в таблицах 1 и 2. В клеточках средних столбцов таблицы 1. Итоги работы сборной по математике в учебном году. Сверху указана сумма баллов N_{ij} , набранная курсантом на том или ином отчетном мероприятии, снизу – его эффективность α_{ij} на данном мероприятии. В клеточках последнего столбца таблицы 1 сверху указана общая сумма баллов R_i , набранная курсантом за учебный год, снизу – его средняя эффективность $\alpha_{i,ср}$ в процентах за этот же период. Красным, зелёным, синим и жёлтым цветами в каждом столбце выделены лучший результат и три следующих за ним в порядке убывания.

Таблица 1. Рейтинг членов сборной по математике по итогам учебного года по средней эффективности

№	ФИО	уч.пр. ЕГЭ	к.р. 15X	СПб 25X	к.р. 6XI	к.р. 12XI	МГО 18-19XI	РХБЗ 13II	к.р. 20II	к.р. 24II	МОК 22-24III	ГУМРФ 31III	НСУМС 18IV	ВСО 26IV	МПУ 28IV	Σ, средн. % к макс.
1	Курсант 1	***	10	5	8	9	52	23	11	11	-	33	8	-	-	170
		76	0,26	0,12	0,15	0,35	0,63	0,26	0,14	0,20	-	0,45	0,50	-	-	31%
2	Курсант 2	***	20	15	16	19	72	68	40	48	30	57	16	3	45	449
		80	0,51	0,36	0,31	0,73	0,88	0,78	0,50	0,89	0,46	0,78	1,00	0,43	0,85	65%
3	Курсант 3	***	12	1	25	22	52	28	40	-	-	29	-	5	11	225
		80	0,31	0,02	0,48	0,85	0,63	0,32	0,50	-	-	0,40	-	0,71	0,21	44%
4	Курсант 4	***	15	7	32	18	78	63	50	33	25	64	11	1	44	441
		70	0,38	0,17	0,62	0,69	0,95	0,72	0,63	0,61	0,38	0,88	0,69	0,14	0,83	59%
5	Курсант 5	***	10	1	16	14	60	44	41	15	-	-	9	2	28	240
		72	0,26	0,02	0,31	0,54	0,73	0,51	0,51	0,28	-	-	0,56	0,29	0,53	41%
6	Курсант 6	***	5	2	13	19	58	36	34	22	-	29	10	6	20	254
		86	0,13	0,05	0,25	0,73	0,71	0,41	0,43	0,41	-	0,40	0,63	0,86	0,38	45%
7	Курсант 7	***	12	32	19	26	62	57	46	54	48	31	11	2	38	438
		76	0,31	0,76	0,37	1,00	0,76	0,66	0,58	1,00	0,74	0,42	0,69	0,29	0,72	64%
8	Курсант 8	***	20	31	20	11	58	30	60	36	-	49	8	2	7	332
		78	0,51	0,74	0,38	0,42	0,71	0,34	0,75	0,67	-	0,67	0,50	0,29	0,13	51%
9	Курсант 9	***	22	16	6	10	48	35	-	-	-	26	11	6	-	180
		76	0,56	0,38	0,12	0,38	0,59	0,40	-	-	-	0,36	0,69	0,86	-	48%
10	Курсант 10	***	39	42	52	15	82	87	80	-	65	73	15	3	53	606
		76	1,00	1,00	1,00	0,58	1,00	1,00	1,00	-	1,00	1,00	0,94	0,43	1,00	91%
11	Курсант 11	***	12	21	25	13	54	30	53	23	-	30	7	2	24	294
		78	0,31	0,50	0,48	0,50	0,66	0,34	0,66	0,43	-	0,41	0,44	0,29	0,45	46%
12	Курсант 12	***	17	11	3	6	62	32	0	-	-	22	9	7	-	169
		80	0,44	0,26	0,06	0,23	0,76	0,37	0,00	-	-	0,30	0,56	1,00	-	40%

Рейтинг членов сборной по математике по итогам учебного года по сумме баллов и по средней эффективности приведен в таблице 2.

В таблице 2 отдельно представлены общие рейтинги членов сборной по сумме набранных баллов за учебный год и по средней эффективности за этот же период. Из данных таблиц видно, что в целом места курсантов в обоих рейтингах или совпадают, или близки. Исключение составляет курсант 9, пропустивший четыре отчетных мероприятия и находящийся по этой причине в конце списка на 10 месте, являясь, таким образом, кандидатом на отчисление из сборной. В то же время по своей средней эффективности этот курсант попадает в первую половину рейтинга на 6-е место, что даёт объективное основание оставить его в сборной.

Таблица 2. Итоги работы сборной по математике в учебном году и по средней эффективности

№ п/п	Курсант (N)	Σ , балл	$\Sigma_{\text{ср.эф.}}$ %	Рейтинг (место)
1	Курсант 10	606	91	1
2	Курсант 2	449	65	2
3	Курсант 4	441	59	4
4	Курсант 7	438	64	3
5	Курсант 8	332	51	5
6	Курсант 11	294	46	7
7	Курсант 6	254	45	8
8	Курсант 5	240	41	10
9	Курсант 3	225	44	9
10	Курсант 9	180	48	6
11	Курсант 1	170	31	12
12	Курсант 12	169	40	11

Таким образом, предлагаемая в статье в качестве рейтинговой оценки средняя эффективность $\alpha_{\text{ср}}$ не только даёт объективное и адекватное описание итогов работы членов сборной, но ещё и позволяет нивелировать провалы в обычном рейтинге по сумме набранных баллов R_i , вызванные пропусками по уважительным причинам некоторых олимпиад, контрольных работ и рубежных контролей. Предлагаемую рейтинговую оценку естественно называть средней эффективностью, и поэтому рекомендуем использовать ее для объективного анализа итогов работы членов сборных команд не только по математике, но и по другим дисциплинам, представляющим участников в олимпиадном движении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наурусова Г.А. Процесс подготовки обучающихся военных вузов к Всерайской олимпиаде по информатике: основные моменты и подходы / Г.А. Наурусова, Д.Г. Дейкун, И.Е.Шемякина // Актуальные проблемы преподавания математических и естественно-научных дисциплин в образовательных организациях высшего образования: сборник докладов очно-заочной научно-методической конференции. Кострома: Издательство «Военная академия радиационной, химической и биологической защиты имени Маршала Советского Союза С.К. Тимошенко», 2021. С. 25-29.
2. Сборник докладов семинара «Вопросы методики подготовки к математическим олимпиадам в высшей школе». Выпуски 1–11. СПб., ВИТУ или ТПП, 1999–2009.
3. Соколов А.В. Математика. Сборник задач для подготовки к олимпиадам: Учебное пособие для вузов. Санкт-Петербург: Издательство Лань, 2024. 224 с. EDN DATWWC.

4. *Соколов А.В.* Об одном типе олимпиадных задач на пределы // Совершенствование методики подготовки обучающихся по математическим дисциплинам, развития научных знаний в области математических наук, разработки и внедрения в образовательный процесс ВУЗа образовательных технологий: материалы научно-методического семинара в рамках всеармейского этапа Международной олимпиады курсантов образовательных организаций высшего образования по математике, Санкт-Петербург, Петергоф, 25 апреля 2024 года. СПб., Петергоф: Военный институт (железнодорожных войск и военных сообщений), 2024. С. 97-101.
5. *Фесенко К.Г.* Технологии информационного моделирования: анализ результативности на примерах в строительстве / К.Г. Фесенко, А.В. Соколов, И.Е. Шемякина // Актуальные вопросы перспективных направлений применения автомобильной и специальной техники: сборник научных трудов IX Межведомственной научно-практической конференции, Санкт-Петербург, 17 октября 2024 года. СПб.: Медиапапир, 2024. С. 377-381.
6. *Соколов А.В.* Составные задачи при подготовке к олимпиадам по математике / А.В. Соколов, Е.О. Польшгалов // Современная педагогика и научные исследования в образовательной организации высшего образования: материалы Всероссийской научно-методической конференции, Кострома, 16 февраля 2025 года. Кострома: Военная академия радиационной, химической и биологической защиты имени С.К. Тимошенко, 2025. С. 110-117.
7. *Соколов А.В., Польшгалов Е.О.* // Информационные технологии в подготовке военного специалиста: материалы Всерос. науч.-практ. конф. СПб.: ВИ(ИТ), 2022. С. 132-136.
8. Современные образовательные технологии: проектно-созидательное обучение и его использование при изучении математики в военном вузе / И.Е. Шемякина, О. Г. Салищева, Е. О. Шахвердова // Педагогические технологии: тенденции развития и опыт внедрения в образовательный процесс: материалы научно-методической конференции, Санкт-Петербург, 07 ноября 2024 года. СПб.: ФГКВУВО «Военной академии материально-технического обеспечения имени генерала армии А.В. Хрулева», 2024. С. 106-110.
9. *Кобякова М.В.* Технология когнитивно-инструктирования в процессе проектирования личностно-развивающего обучения в вузе / М.В. Кобякова, А.Л. Каткова // Мир науки. Педагогика и психология. 2020. Т. 8, № 5. С. 32.

УДК 51:378.147

А. Р. Шкадова, И. В. Войтко

Государственный университет морского и речного флота
им. адмирала С.О. Макарова
Россия, Санкт-Петербург, e-mail: nyttt@rambler.ru, voytko.irina@yandex.ru

О ПРЕПОДАВАНИИ СТУДЕНТАМ ПОНЯТИЙ КАТЕНАРИИ И КАТЕНоиДА

В статье методами вариационного исчисления производится подробный вывод уравнения поверхности вращения наименьшей площади и уравнения катенарии. Для лучшего понимания формы этой поверхности (катеноида) предлагается рассчитать поверхность катушек, образованных вращением кусочно-заданных функций с различными параметрами вокруг оси абсцисс.

Ключевые слова: катенария, цепная линия, катеноид, катушка

A. R. Shkadova, I. V. Vojtko

ON TEACHING THE CONCEPTS OF CATENARY AND CATENOID TO STUDENTS

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
Russia, Saint-Petersburg, e-mail: nyttt@rambler.ru, voytko.irina@yandex.ru

In the article, using methods of the calculus of variations, the author gives a detailed derivation of the equation of the surface of revolution with the minimal area and the equation of the catenary. To facilitate a better understanding by students of the shape of this surface (catenoid), it is proposed to calculate the surface of coils formed by rotating piecewise-defined functions with various parameters around the abscissa axis.

Keywords: catenary, catenoid, coil

В данной статье описывается методика изучения студентами четвёртого курса цепной линии (катенарии) и катеноида – поверхности, образованной её вращением вокруг некоторой оси. Данные объекты могут изучаться в курсе вариационного исчисления.

Требуется найти кривую с заданными граничными точками $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, от вращения которой вокруг оси абсцисс образуется поверхность наименьшей площади (рис. 1).

Как известно, площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S = 2\pi \int_{x_A}^{x_B} y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

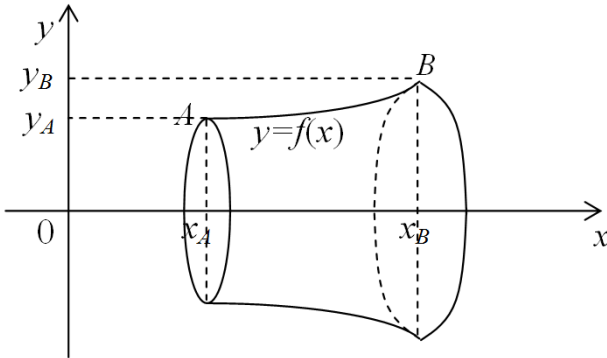


Рис. 1. Поверхность вращения кривой AB

В этой формуле можно заметить длину окружности 2π переменного радиуса y (если занести 2π под знак интеграла) и дифференциал длины кривой $dl = \sqrt{1 + y'^2} dx$, который при интегрировании даст боковую поверхность тела.

Константа 2π не повлияет на расчёты. Задача сводится к нахождению минимума функционала

$$S[y(x)] = \int_{x_A}^{x_B} y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

с граничными условиями $y(x_A) = y_A$, $y(x_B) = y_B$ на множестве непрерывно дифференцируемых функций. Решением задачи будет экстремаль этого функционала [1]. Чтобы её найти, нужно решить уравнение Эйлера

$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$, являющееся необходимым условием экстремума функционала.

Подынтегральная функция $F(y, y') = y\sqrt{1 + y'^2}$ зависит только от y и y' (частный случай 5 интегрирования уравнения Эйлера [2]), поэтому первый интеграл уравнения Эйлера будет иметь вид

$$F - y'F_{y'} = C_1,$$

или

$$y\sqrt{1 + y'^2} - y' \cdot y \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{y + y \cdot y'^2 - y \cdot y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1,$$

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1, \quad y = C_1 \sqrt{1+y'^2}. \quad (1)$$

Будем искать экстремальную кривую в параметрической форме. Сделаем подстановку, используя гиперболические функции:

$$y' = \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Тогда

$$1 + \operatorname{sh}^2 t = 1 + \frac{(e^t - e^{-t})^2}{4} = \frac{4 + e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2 = \operatorname{ch}^2 t, \\ \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t} = \operatorname{ch} t.$$

Из (1) следует, что

$$y = C_1 \operatorname{ch} t. \quad (2)$$

Нам известны y' и y как функции параметра t . Найдём x , используя тождество $y' = \frac{dy}{dx}$. Из (2)

$$dy = y' dt = C_1 \operatorname{sh} t dt, \\ y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1 \operatorname{sh} t dt}{\operatorname{sh} t} = C_1 dt, \\ x = C_1 t + C_2.$$

Таким образом, получаем параметрически заданную линию:

$$\begin{cases} x = C_1 t + C_2, \\ y = C_1 \operatorname{ch} t. \end{cases} \quad (3)$$

Исключив параметр t , получим уравнение катенарии в явном виде:

$$t = \frac{x - C_2}{C_1} \Rightarrow y = C_1 \operatorname{ch} \frac{x - C_2}{C_1}. \quad (4)$$

Это семейство цепных линий (*катенарий*). Слово «катенария» происходит от латинского *catena* – цепь. Иногда уравнение цепной линии записывают в виде

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

Именно такую форму принимает закреплённая в двух точках (не обязательно на одной высоте) цепь или гибкая однородная тяжёлая нерастяжимая нить, например, телеграфный провод, под действием силы тяже-

сти (рис. 2, а). От вращения цепных линий, или катенарий, образуются поверхности, называемые *катеноидами* (рис. 2, б).



Рис. 2. Катенария и катеноид

Форму катеноида принимает мыльная плёнка, натянутая на два кольца, плоскости которых перпендикулярны линии, соединяющей их центры. Мыльная плёнка очень лёгкая, и её внутренние силы сцепления гораздо сильнее, чем сила тяжести. Вследствие этого плёнка всегда принимает вид поверхности, имеющей минимальную площадь при данных граничных условиях (рис. 3).

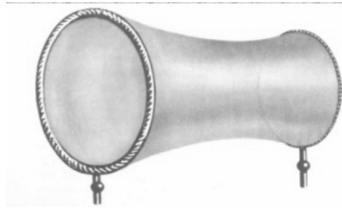


Рис. 3. Мыльная плёнка, натянутая на два кольца

Постоянные C_1 и C_2 в равенствах (3) или (4) определяются из системы уравнений, получаемой при подстановке координат точек A и B в граничные условия $y(x_A)=y_A$, $y(x_B)=y_B$:

$$y_A = C_1 \operatorname{ch} \frac{x_A - C_2}{C_1}, \quad y_B = C_1 \operatorname{ch} \frac{x_B - C_2}{C_1}.$$

Замечание. В зависимости от положения граничных точек A и B решение может существовать или не существовать. Например, если $x_A = x_B$ (точки расположены одна над другой), то из последних равенств получим $y_A = y_B$, т.е. точки A и B совпадут, что может противоречить исходным данным, если $y_A \neq y_B$. Если же $y_A = y_B$, то кривая вырождается в точку.

Для лучшего усвоения понятий катенарии и катеноида студентам были даны несколько заданий.

Задание 1. Нарисуйте цепную линию, проходящую через две заданные точки.

Пример. Даны точки на плоскости: $A(3,4)$, $B(5,8)$.

Воспользуемся готовым уравнением цепной линии (4):

$$y = C_1 \operatorname{ch} \frac{x - C_2}{C_1}$$

и найдём произвольные постоянные. Для этого подставим в уравнение координаты заданных точек:

$$y_A = C_1 \operatorname{ch} \frac{x_A - C_2}{C_1}, \quad y_B = C_1 \operatorname{ch} \frac{x_B - C_2}{C_1}.$$

Получим систему трансцендентных уравнений

$$\begin{cases} C_1 \operatorname{ch} \frac{3 - C_2}{C_1} = 4, \\ C_1 \operatorname{ch} \frac{5 - C_2}{C_1} = 8, \end{cases} \quad (5)$$

которую решим в математическом пакете Maple. Зададим систему

$$\text{sys2} := \left\{ C1 \operatorname{cosh} \left(\frac{3 - C2}{C1} \right) = 4, C1 \operatorname{cosh} \left(\frac{5 - C2}{C1} \right) = 8 \right\}$$

и решим её с помощью функции *fsolve*. Для неё необходимо задать промежуток, в котором находится решение. Если не задавать такой промежуток, функция *fsolve* может выдать только одно решение. Чтобы определить промежутки, построим графики обоих уравнений системы в координатах C_1 , C_2 и найдём точки их пересечения.

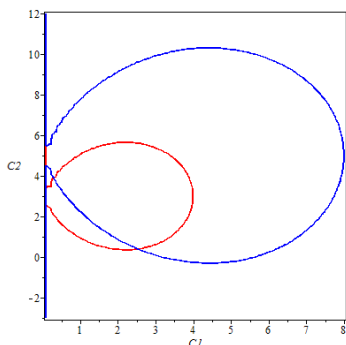


Рис. 4. Определение промежутков, содержащих решение системы (5)

Решаем систему для первой точки пересечения:

```
C:=fsolve(sys, {C1,C2}, C1=0..1, C2=2..5);
```

```
C := { C1 = 0.2669507518, C2 = 3.907370220 }
```

Проверим выполнение граничных условий. Для этого зададим уравнение цепной линии как функцию $chain(x)$:

$$chain := x \rightarrow C1 \cosh\left(\frac{x - C2}{C1}\right)$$

Вычислим значения этой функции в заданных точках x :

```
chain(3); chain(5);
4.000000004
7.999999986
```

Видим, что полученные значения y при выбранной точности соответствуют заданным значениям x и граничные условия выполняются.

Построим графики найденной цепной линии и граничных точек (рис. 5).

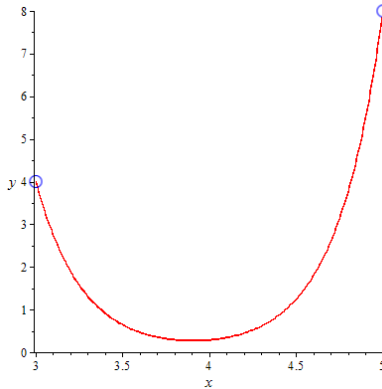


Рис. 5. График цепной линии, проходящей через заданные точки

Вычислим длину этой цепной линии, а также площадь поверхности её вращения вокруг оси абсцисс. Для этого определим значения функции $y=chain(x)$ и её производной с найденными значениями C_1 и C_2 и вычислим нужные величины по известным формулам. Получим

$$L:=11.987, S=252,781.$$

Построим поверхность наименьшей площади, которая образуется при вращении цепной линии. Эта поверхность называется *катеноидом*.

1-й способ (рис. 6).

$\text{implicitplot3d}((C1*\cosh((x-C2)/C1))^2 = y^2+z^2, x=3..5, y=-10..10, z=-8..8, \text{axes} = \text{boxed}, \text{numpoints}=50000, \text{color}=\text{yellow}, \text{orientation}=[92,-69,165]);$

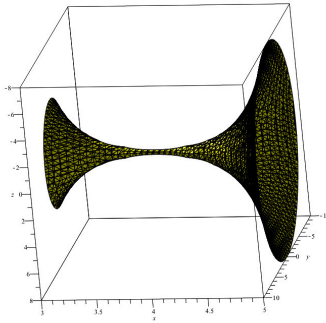


Рис. 6. Катеноид, построенный первым способом

2-й способ (рис. 7).

$\text{plot3d}([C1*\cosh((x-C2)/C1)*\cos(y), C1*\cosh((x-C2)/C1)*\sin(y), x], x=3..5, y=0..8, \text{axes}=\text{boxed}, \text{numpoints}=50000, \text{orientation}=[-108,7,68]);$

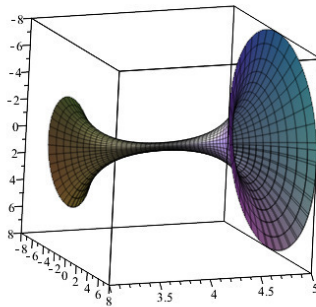


Рис. 7. Катеноид, построенный вторым способом

Задание 2. Постройте цепную линию для второй точки пересечения уравнений системы (5) (см. рис. 4), найдите её длину. Сравните длины двух цепных линий. Постройте катеноид двумя способами. Вычислите площади поверхностей вращения для двух катеноидов и сравните их между собой.

Задание 3. Сделайте свой вариант задания с граничными условиями из соответствующей таблицы. Найдите наилучшие ракурсы для катеноидов.

Для лучшего понимания величины поверхности вращения рассматривалась катушка, образованная вращением различных ломаных линий вокруг оси абсцисс.

Рассмотрим чертёж проекции катушки на плоскость XOY (рис. 8).

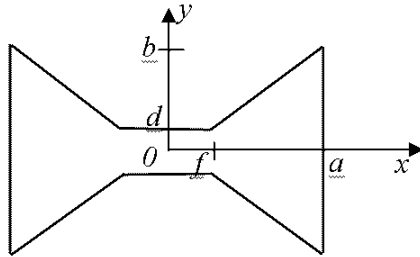


Рис. 8. Проекция катушки на плоскость XOY

Пусть величины a и b (габаритные размеры катушки) будут постоянными, а d и f , определяющие форму катушки – переменными. Нетрудно вывести формулу для расчёта боковой поверхности вращения, если вспомнить формулы боковой поверхности конуса и цилиндра:

$$\frac{1}{2}S = \pi(b+d)\sqrt{(b-d)^2 + (a-f)^2} + 2\pi d \cdot f;$$

$$S = 2\pi(b+d)\sqrt{(b-d)^2 + (a-f)^2} + 4\pi d \cdot f. \quad (6)$$

Составим процедуру рисования катушки:

```
g := (a, b, d, f) -
>PLOT (CURVES ([ [0, d], [f, d] ], [ [f, d], [a, b] ], [ [a, b], [a, -b] ], [ [a, -b], [f, -d] ], [ [f, -d], [-f, -d] ], [ [-f, -d], [-a, -b] ], [ [-a, -b], [-a, b] ], [ [-a, b], [-f, d] ], [ [-f, d], [0, d] ] ) );
```

и процедуру вычисления боковой поверхности:

$$Sfig := (a, b, d, f) \rightarrow 2 \pi (b + d) \sqrt{(b - d)^2 + (a - f)^2} + 4 \pi d f.$$

Задание 4. Изменяя параметры f и d в области натуральных чисел, проследите изменение площади поверхности и чертежа катушки. Задайте изменение параметров в различных циклах, например, таком:

```
for i from 1 by 2 to a do
  i:=i; j:=i; S:=Sfig(a,b,i,j); S:=evalf(S,4); g(a,b,i,j) end do;
```

Задайте двойной цикл рисования катушки, например, такой:

```
> with(plots):
> for i from 1 by 2 to a/2 do
  for j from 1 by 2 to b do
    S:=Sfig(a,b,i,j); Se:=evalf(S,4); gp:=g(a,b,i,j); print
    int(i,j,S,Se); print(display(gp)) end do end do;
```

Определите, при каких *натуральных* значениях параметров *f* и *d* от 1 до 10 площадь наименьшая. Приведите чертежи проекций катушек.

Примеры (рис. 9).

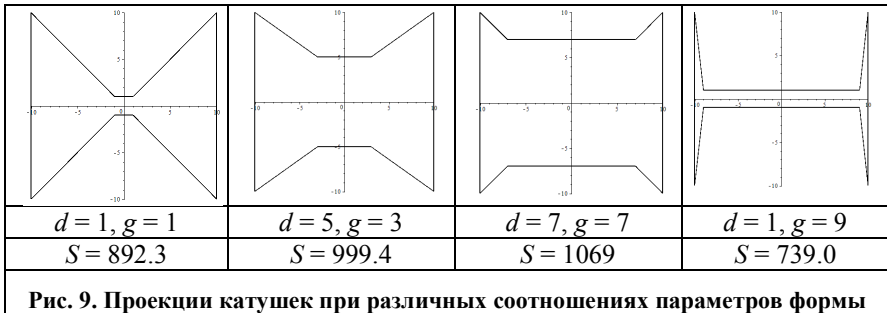


Рис. 9. Проекция катушек при различных соотношениях параметров формы

Задание 5. Постройте график функции двух переменных, вычисляющей поверхность по формуле (2). Имеет ли эта функция минимум?

Задание 6. Задайте собственную ломаную линию как график кусочно-непрерывной функции, нарисуйте этот график (рис. 10). Постройте трёхмерный график соответствующей катушки.

Пример. $a := 10; b := 10; d := 3; f := 4$

```
g1:=piecewise(abs(x)<=f,d,f<x and x<a,d+(b-d)*(x-f)/(a-f),-a<x and x<-f,b+(x+a)*(d-b)/(a-f));
```

$$g1 := \begin{cases} 3 & |x| \leq 4 \\ -\frac{5}{3} + \frac{7}{6}x & 4 < x \text{ and } x < 10 \\ -\frac{5}{3} - \frac{7}{6}x & -10 < x \text{ and } x < -4 \end{cases}$$

```
plot(g1, x=-10..10, 0..10, scaling=constrained, discont=true);
```

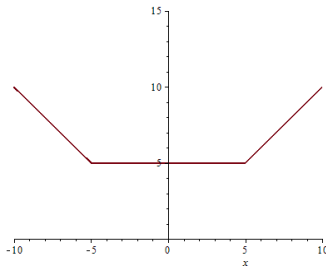


Рис. 10. График кусочно-непрерывной функции, образующий при вращении катушку

```
implicitplot3d(g1^2 = y^2 + z^2, x=-11..11, y=-11..11, z=-11..11, axes = boxed, numpoints = 50000, color = white, orientation = [112, -72, 130], scaling = constrained);
```

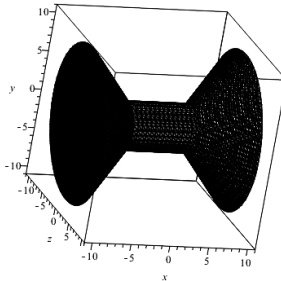


Рис. 11. Катушка

Задание 7. Составьте процедуру рисования кусочно-заданных функций и катушек в зависимости от размеров.

Задание 8. Придумайте другую конструкцию катушки, более близкую к Вашему катеноиду, и исследуйте её поверхность на минимум. Используйте кривые линии. Нарисуйте сечение катушки и её трёхмерный график (рис. 11).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: Учебник для вузов. М.: Наука, 1969. 424 с.
2. Пантелеев А.В. Вариационное исчисление в примерах и задачах: Учебное пособие. М.: Высшая школа., 2006. 272 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 51-74

А. В. Гусаров

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П. А. Соловьева
Россия, г. Рыбинск, *e-mail:alvgus@mail.ru*

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОВЫШЕНИЯ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ЦИФРОВЫХ САУ

В статье рассматривается один из методов повышения быстродействия вычислителя цифровой системы стабилизации мощности электронного луча в установке для электронно-лучевого нанесения тонких пленок. Система стабилизации обеспечивает компенсацию отклонения электронного луча от заданного положения вследствие изменения формы катода испарителя. Показано влияние запаздывания на параметры переходного процесса следящей системы, обеспечивающей смену режимов работы системы стабилизации.

Ключевые слова: *быстродействие цифровой САУ, запаздывание, ускоренное умножение, переходный процесс*

A. V. Gusarov

P.A. Solovyov Rybinsk State University of Aviation Technology
Russia, Rybinsk, *e-mail:alvgus@mail.ru*

ONE WAY TO IMPROVE DIGITAL ACS PERFORMANCE

The article discusses one of the methods for increasing the speed of the computer of a digital system for stabilizing the power of an electron beam in an installation for electron-beam deposition of thin films. The stabilization system compensates for the deviation of the electron beam from a given position due to a change in the shape of the evaporator cathode. The effect of delay on the parameters of the transient process of the servo system, which provides a change in the operating modes of the stabilization system, is shown.

Keywords: *speed of digital automatic control system, delay, accelerated multiplication, transient process*

Для совершенствования процесса нанесения покрытий и тонких пленок методом электроннолучевого испарения из водоохлаждаемого тиг-

ля в РГАТУ имени П. А. Соловьева была разработана система стабилизации положения электронного луча с датчиком отраженных электронов [1-3]. Для компенсации помех, связанных, в частности, с изменением формы катода вследствие его нагрева, разработана система стабилизации мощности, передаваемой в испаритель.

В работе [3] предполагалось, что на выходе цифрового регулятора присутствует экстраполятор нулевого порядка, запаздывание существенно меньше периода дискретизации, поэтому для получения дискретной передаточной функции объекта управления $W_{Oy}(z)$ в каноническом виде использовалось выражение [3]:

$$W_{Oy}(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ L^{-1} \left(\frac{W_{Oy}(p)}{p} \right) \right\}, \quad (1)$$

где Z – оператор дискретного z -преобразования;

L^{-1} – оператор обратного преобразования Лапласа;

$W_{Oy}(p)$ – непрерывная передаточная функция объекта управления.

Однако ситуация, когда запаздывание существенно меньше периода дискретизации, не всегда имеет место, особенно при автоматическом управлении тепловыми процессами. В этом случае переходный процесс не обеспечивает требуемые параметры качества переходного процесса, в частности, отсутствие перерегулирования или не более, чем 20-процентное перерегулирование (рис. 1).

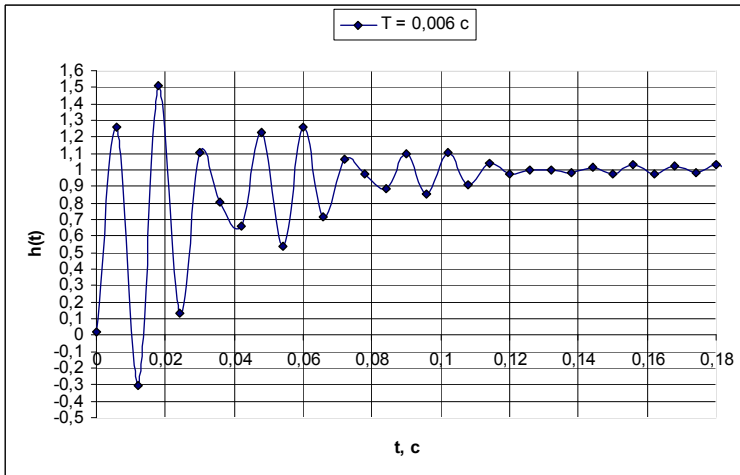


Рис. 1. Переходный процесс при наличии запаздывания $\epsilon = 0,1$ от величины периода дискретизации

При отсутствии запаздывания, точнее, при ϵ много меньше 1, переходный процесс имеет вид, приведенный на рис. 2.

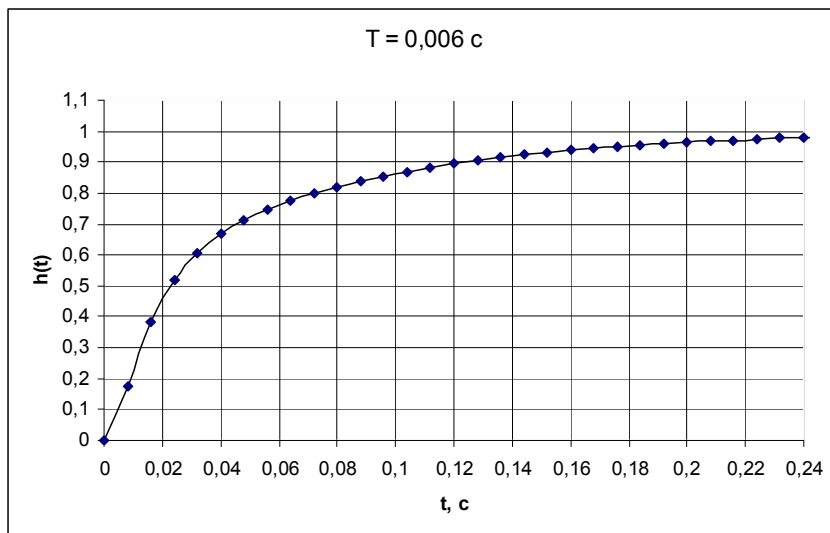


Рис. 2. Переходный процесс при значении $\epsilon \ll 1$

Известно, что запаздывание в цифровой системе управления включает в себя запаздывание в непрерывной части и запаздывание в вычислителе.

Запаздывание в непрерывной части цифровой системы, как правило, устранить или уменьшить не удастся. Запаздывание в вычислителе можно уменьшить путем увеличения тактовой частоты микропроцессора или микроконтроллера, однако это не всегда возможно из-за ограниченной тактовой частоты микропроцессора или микроконтроллера.

Типичный алгоритм работы микропроцессора или микроконтроллера при управлении объектами с помощью цифрового регулятора, реализующего рекурсивный фильтр, выглядит так

Сигнал $y[nT]$ на выходе рекурсивного цифрового фильтра в дискретные моменты времени nT ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) определяется выражением [4]:

$$y[nT] = \sum_{m=0}^N a_m \cdot x[(n-m)T] + \sum_{m=1}^M b_m \cdot y[(n-m)T], \quad (2)$$

где $x[(n-m)T]$ – m -й отсчет входного сигнала ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$) в дискретный момент времени nT ,

$y[(n - m)T]$ – m -ное значение выходного сигнала ($m = 1, 2, 3, \dots$), вычисленное в дискретный момент времени, предшествующий nT ;

a_m – коэффициент, характеризующий вклад m -го отсчета входного сигнала $x[(n - m)T]$ в формирование значения выходного сигнала $y[nT]$;

b_m – коэффициент, характеризующий вклад предыдущего значения выходного сигнала $y[(n - m)T]$ в формирование значения выходного сигнала $y[nT]$;

N – количество отсчетов входного сигнала $x[(n - m)T]$, участвующих в формировании значения выходного сигнала $y[nT]$;

M – количество значений выходного сигнала $y[(n - m)T]$, участвующих в формировании значения выходного сигнала $y[nT]$;

T – период дискретизации, т. е. интервал времени между дискретными моментами времени получения входного сигнала, расчета значения выходного сигнала по выражению (2) с последующей выдачей двоичного выходного сигнала.

Значения коэффициентов a_m и b_m известны заранее, что позволяет применять ускоренные методы умножения, в которых подразумевается наличие априорной информации о значении одного из множителей, входящих в произведение.

Были рассмотрены следующие основные методы ускоренного умножения [5]:

- алгоритм Бута;
- алгоритм Лемана;
- алгоритм, использующий схему Горнера.

Анализ рассмотренных примеров позволяет сделать вывод, что алгоритмы Бута и Лемана позволяют повысить быстродействие за счет сокращения количества операций сложения. Операции анализа содержимого цепочки битов не занимают машинного времени.

Количество команд для выполнения ускоренного умножения по схеме Горнера сильно зависит от двоичного представления множителя, но команды эти реализуют простые операции, выполняемые за 1 – 3 такта машинного времени микропроцессора и за 1 такт машинного времени микроконтроллера.

Составим итоговую таблицу (таблица 1), в которую сведем результаты анализа методов ускоренного умножения. Будем считать, что в микроконтроллере с RISC-архитектурой все команды выполняются за 1 такт машинного времени, в микропроцессоре команды сложения регистров выполняются за 3 такта, команды сдвигов за 2 такта [6]. Алгоритмы Бута и Лемана реализуются на микроконтроллере, алгоритм по методу Горнера – на микропроцессоре и микроконтроллере.

Таблица 1. Сравнение методов ускоренного умножения по количеству затрачиваемых тактов машинного времени

Множитель	Метод ускорения умножения	Кол-во тактов машинного времени (сложение + вычитание + сдвиг = сумма)
165 = 10100101	Алгоритм Бута (исходный)	$4 + 4 + 9 = 17$
	Алгоритм Бута (модифицированный)	$3 + 2 + 6 = 11$
	Алгоритм Лемана	$4 + 0 + 9 = 13$
	Алгоритм по схеме Горнера	3·3 такта + 0 + 7·2 такта = 23 на микропроцессоре 3 + 0 + 7 = 10 на микроконтроллере
-193 = =11000001b	Алгоритм Бута (исходный)	$2 + 2 + 9 = 13$
	Алгоритм Бута (модифицированный)	$2 + 2 + 7 = 11$
	Алгоритм Лемана	$1 + 1 + 9 = 11$
	Алгоритм по схеме Горнера	2·3 такта + 0 + 7·2 такта = 20 на микропроцессоре 2 + 0 + 7 = 9 на микроконтроллере

Таким образом, для умножения на фиксированный множитель в микроконтроллерах с RISC-архитектурой наиболее эффективны модифицированный алгоритм Бута, алгоритм Лемана и алгоритм по схеме Горнера. Выбор наиболее эффективного алгоритма целесообразно определять после рассмотрения всех трех вариантов для конкретного множителя. При рассмотрении примеров с числами $165 = 10100101$ и $-193 = 11000001b$ наиболее эффективен алгоритм по схеме Горнера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гусаров А.В. Математическое моделирование датчика положения электронного луча // Неделя науки 2023. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. (г. Сибай. Республика Башкортостан, 6–7 апреля 2023 г.). Сибай: Сибайский институт (филиал) УУНиТ, 2023. С. 217–220.
2. Гусаров А.В. Математическая модель системы регулирования положения электронного луча // Математика и естественные науки. Теория и практика. Межвузовский сборник научных трудов. Вып. 19. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2024. С. 129–134.

3. *Гусаров А.В.* К вопросу моделирования цифровой системы стабилизации // Математика и естественные науки. Теория и практика. Межвузовский сборник научных трудов. Вып. 20. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2025. С. 101–106.
4. Цифровые фильтры. URL: <https://portal.tpu.ru/SHARED/v/VOS/study/disc1/Tab/tema09.pdf> (дата обращения 06.12.2025).
5. *Качинский М.В.* Арифметические основы электронных вычислительных средств: учеб-метод. пособие / М.В. Качинский, В.Б. Клюс, А.Б. Давыдов. Минск: БГУИР, 2014. 64 с. URL: https://libeldoc.bsuir.by/bitstream/123456789/2535/2/Kachinskii_ari.pdf (дата обращения 20.12.2025).
6. Микропроцессоры и микропроцессорные комплекты интегральных микросхем: Справочник: в 2 т. / Н.Н. Аверьянов, А.И. Березенко, Ю.И. Борщенко и др.; под ред. В.А. Шахнова. М.: Радио и связь, 1988. Т. 2. 368 с.

УДК 51-7

Н. И. Гусарова¹, Е. В. Олейникова¹, Л. А. Гусарова²

¹Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П. А. Соловьева

Россия, г. Рыбинск, *e-mail: gusarova-73@mail.ru, ev.olejnikova@yandex.ru*

²Ярославский государственный педагогический университет
им. К.Д. Ушинского

Россия, г. Ярославль, *e-mail: gusarla05@yandex.ru*

О СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДАХ В ЛИНГВИСТИКЕ

В статье обсуждаются вопросы применения методов математической статистики в лингвистическом анализе текстов на примере произведений А.М. Волкова. Изучаются особенности лексического состава произведений автора в разные периоды его творчества на примере количественного соотношения глаголов и прилагательных

Ключевые слова: *частеречный состав, лингвистический анализ, статистические гипотезы, непараметрический критерий*

N. I. Gusarova¹, E. V. Oleynikova¹, L. A. Gusarova²

¹P.A. Solovyov Rybinsk State University of Aviation Technology
Russia, Rybinsk, *e-mail: gusarova-73@mail.ru, ev.olejnikova@yandex.ru*

²K.D. Ushinsky Yaroslavl State Pedagogical University
Russia, Yaroslavl, *e-mail: gusarla05@yandex.ru*

ON STATISTICAL METHODS IN LINGUISTICS

The article discusses the application of mathematical statistics methods in the linguistic analysis of texts using the works of A. M. Volkov as an example. The article examines the features of the lexical composition of the author's works in different periods of his creative work using the quantitative ratio of verbs and adjectives.

Keywords: *part-of-speech composition, linguistic analysis, statistical hypotheses, nonparametric criterion*

Художественный текст является уникальным явлением языка, в котором слово функционирует не только как носитель информации, но и как средство эстетического воздействия на читателя. Одной из важнейших составляющих художественного стиля является лексический состав произведения – совокупность слов, используемых автором для создания образности и выражения идейного содержания.

Частеречный состав текста – соотношение глаголов, прилагательных и других частей речи – является важным показателем авторского стиля и отражает замысел писателя. Изучение этих особенностей позволяет глубже понять произведение и выявить закономерности в развитии его художественного мастерства.

Материалом для исследования выбран цикл произведений Александра Мелентьевича Волкова «Волшебная страна» – одно из самых значительных явлений в истории русской детской литературы. Рассматриваются две книги цикла: «Волшебник Изумрудного города» (1939, первая книга) и «Тайна заброшенного замка» (1959, восьмая книга). Выбор именно этих произведений обусловлен тем, что они разделены двадцатилетним промежутком, что позволяет проследить эволюцию лексического состава в творчестве автора на значительном временном расстоянии.

Соотношение между глаголами и прилагательными в тексте может указывать на тип текста и творческие задачи автора. Как справедливо отмечает Ф.Д. Макаренко, «много глаголов в повествовании, так как этот тип речи характеризуется тем, что его тема раскрывается в процессе развития действий, состояний, событий» [1]. Текст с преобладанием прилагательных воспринимается как описательный, статичный, сосредоточенный на деталях и образах.

Исследование проводилось на основе метода серийного отбора. Из каждого произведения были отобраны 10 серий (отрывков) по 105 словоупотреблений каждая. Отбор производился систематически: определялось общее количество слов в тексте каждой книги, это число делилось на 10, и отрывки для анализа отсчитывались через равные интервалы. Таким образом, был проведен серийный, механический бесповторный отбор эмпирических данных. В каждом отрывке проводилась ручная выборка всех глаголов и прилагательных. Глаголы определялись как части речи, обозначающие действие или состояние предмета. Прилагательные определялись как части речи, обозначающие признак. Причастия, выступающие в функции прилагательного, также учитывались как прилагательные согласно традиции, принятой в лингвистике при анализе художественного текста.

В качестве статистических данных выбраны четыре признака в двух произведениях. Для «Волшебника Изумрудного города» признак X_1 – количество глаголов, признак Y_1 – количество прилагательных в отобранных сериях. Признаки X_1 и Y_1 являются зависимыми. Аналогично для «Тайны заброшенного замка» признак X_2 – количество глаголов и признак Y_2 – количество прилагательных в отобранных сериях – также являются зависимыми.

Полученные статистические данные для $n = 10$ отрывков в каждом произведении заносим в табл. 1.

Таблица 1

X_1	14	21	27	20	32	15	17	20	20	21
Y_1	12	5	3	2	7	19	14	4	8	5
X_2	15	15	15	13	16	15	11	23	26	22
Y_2	18	9	17	20	11	10	10	10	8	2

Для каждой из четырех выборок приведем результаты первичного статистического анализа данных в таблице 2.

Таблица 2

Произведение	«Волшебник Изумрудного города»		«Тайна заброшенного замка»	
	X_1	Y_1	X_2	Y_2
Числовые характеристики	X_1	Y_1	X_2	Y_2
Выборочная средняя	20,7	7,9	17,1	11,5
Мода	20	5	15	10
Медиана	20	6	15	10
Размах вариации	18	17	15	18
Среднее квадратическое отклонение	5,1	5,2	4,6	5,1
Коэффициент вариации	24,63%	65,63%	26,85%	44,38%

Сравнение количества глаголов и прилагательных для произведения «Волшебник Изумрудного города» наглядно представлено на следующей диаграмме (рис. 1)

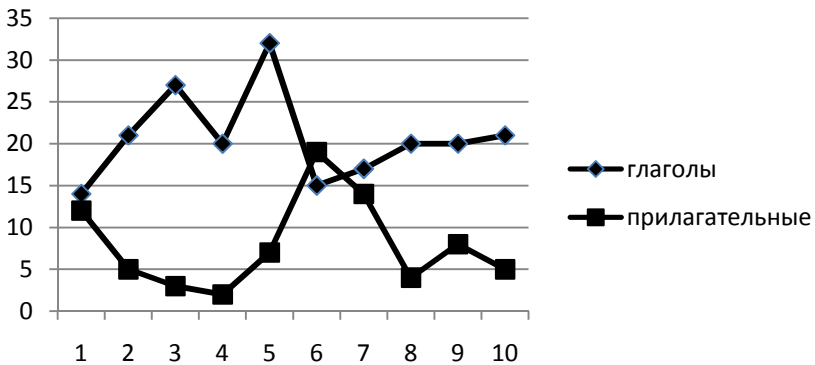


Рис. 1. Диаграмма для признаков X_1 и Y_1 .

Сравнение количества глаголов и прилагательных в произведении «Тайна заброшенного замка» наглядно представлено на следующей диаграмме (рис. 2)

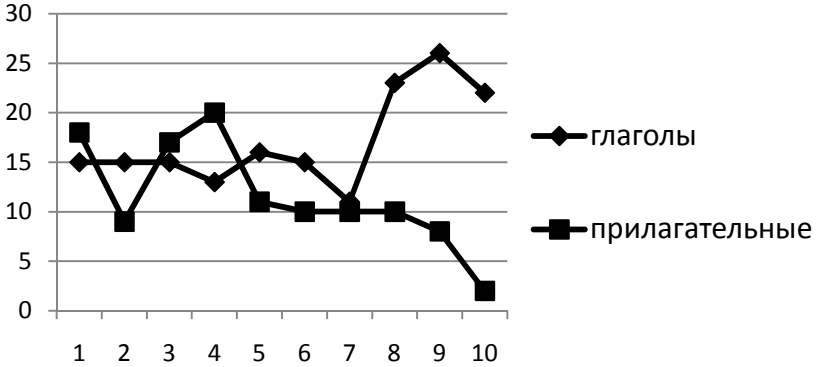


Рис. 2. Диаграмма для признаков X_2 и Y_2 .

Статистические данные в лингвистике, как правило, не подчиняются нормальному закону распределения, поэтому параметрический анализ здесь неприменим [2].

Оценим тесноту и направление связи между количеством глаголов и прилагательных в каждом произведении. Здесь целесообразно провести тест ранговой корреляции Спирмена. Выбор этого метода обусловлен наличием выбросов данных и отсутствием нормальности распределения признаков. Ранжируем данные по неубыванию, т. е. присваиваем каждому значению признака его порядковый номер. Для одинаковых значений признака ранг равен среднему арифметическому порядковых номеров. Далее находим квадраты разности рангов (d_i^2) по каждой паре значений признаков. В таблице 3 представлены расчеты для «Волшебника Изумрудного города».

Таблица 3

X_1	14	21	27	20	32	15	17	20	20	21	Сумма
Ранг X_1	1	7,5	9	5	10	2	3	5	5	7,5	
Y_1	12	5	3	2	7	19	14	4	8	5	
Ранг Y_1	8	4,5	2	1	6	10	9	3	7	4,5	
d_i^2	49	9	49	16	16	64	36	4	4	9	256

Вычисляем коэффициент ранговой корреляции Спирмена:

$$r = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \cdot \sum_{i=1}^{10} d_i^2 = 1 - \frac{6}{10 \cdot (100 - 1)} \cdot 256 = -0,55.$$

В таблице 4 представлены расчеты для коэффициента корреляции данных в произведении «Тайна заброшенного замка».

Таблица 4

X_2	15	15	15	13	16	15	11	23	26	22	Сумма
Ранг X_2	4,5	4,5	4,5	2	7	4,5	1	9	10	8	
Y_2	18	9	17	20	11	10	10	10	8	2	
Ранг Y_2	9	3	8	10	7	5	5	5	2	1	
d_i^2	20,25	2,25	12,25	64	0	0,25	16	16	64	49	244

Вычисляем коэффициент ранговой корреляции Спирмена:

$$r = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \cdot \sum_{i=1}^{10} d_i^2 = 1 - \frac{6}{10 \cdot (100 - 1)} \cdot 244 = -0,48.$$

В обоих случаях коэффициенты указывают на умеренную отрицательную зависимость количества глаголов и прилагательных.

Таким образом, первичный статистический анализ дает возможность предположить, что количество глаголов в обоих выбранных произведениях в среднем превышает количество прилагательных. Проверим эту гипотезу статистически.

Для сравнения зависимых выборок при анализе лингвистических данных целесообразно применять парный критерий Уилкоксона. Статистические гипотезы для сравнения количества прилагательных и глаголов в выбранных текстах будут иметь следующий вид.

Нулевая гипотеза (H_0). Среднее количество глаголов в тексте равно среднему количеству прилагательных.

Конкурирующая гипотеза (H_1). Среднее количество глаголов в тексте больше среднего количества прилагательных.

Для расчета наблюдаемого значения критерия Уилкоксона необходимо найти разности количества признаков в каждом отрывке. После этого проранжировать их модули по неубыванию. Нетипичными являются ранги, для которых знак разности отличен от большинства. Эмпирическим значением критерия Уилкоксона будет являться сумма нетипичных рангов.

Составим расчетную таблицу 5 критерия Уилкоксона для сравнения глаголов X_1 и прилагательных Y_1 в «Волшебнике Изумрудного города»

Таблица 5

X_1	14	21	27	20	32	15	17	20	20	21
Y_1	12	5	3	2	7	19	14	4	8	5
Разность	2	16	24	18	25	-4	3	16	12	16
Ранг	1	6	9	8	10	3	2	6	4	6

В данном случае имеем единственный нетипичный ранг, равный 3, в шестом отрывке. Поэтому наблюдаемое (эмпирическое) значение критерия: $W_{\text{эм.}} = 3$. Из таблиц критических значений критерия Уилкоксона найдем значения для уровней значимости 0,05 и 0,01 с $k = 10$ степенями свободы: $W_{\text{крит.}}(0,05) = 10$; $W_{\text{крит.}}(0,01) = 5$.

Построим ось статистики критерия Уилкоксона (рис. 3).

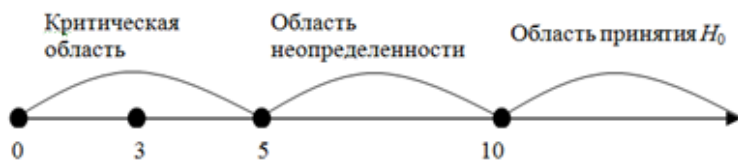


Рис. 3. Ось статистики для «Волшебника Изумрудного города»

Эмпирическое значение критерия оказалось в критической области, значит есть основания отвергнуть нулевую гипотезу в пользу конкурирующей. Это означает, что можно сделать вывод о том, что количество глаголов в «Волшебнике Изумрудного города» значительно превышает количество прилагательных.

Проводим аналогичные рассуждения для сравнения глаголов X_2 и прилагательных Y_2 в «Тайне заброшенного замка» (таблица 6).

Таблица 6

X_2	15	15	15	13	16	15	11	23	26	22
Y_2	18	9	17	20	11	10	10	10	8	2
Разность	-3	6	-2	-7	5	5	1	13	18	20
Ранг	3	6	2	7	4,5	4,5	1	8	9	10

В данном случае нетипичные ранги наблюдаются в первом, третьем и четвертом отрывках текста. Поэтому наблюдаемое (эмпирическое) значение критерия: равно их сумме: $W_{эм.} = 3 + 2 + 7 = 12$.

Построим ось статистики критерия Уилкоксона (рис. 4).

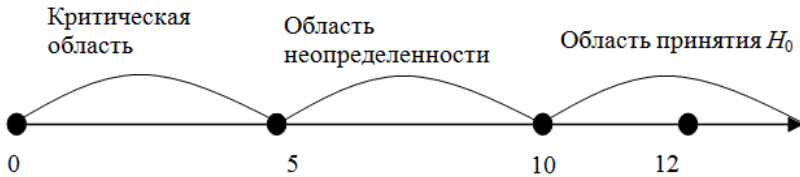


Рис. 4. Ось статистики для «Тайны заброшенного замка»

Эмпирическое значение критерия оказалось в области принятия нулевой гипотезы, значит, нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Статистически значимого различия количества глаголов и прилагательных в «Тайне заброшенного замка» не обнаружено.

Для решения вопроса о различии количества глаголов проведем сравнительный анализ между произведениями. Количество глаголов в «Волшебнике Изумрудного города» (признак X_1) и в «Тайне заброшенного замка» (признак X_2) являются независимыми, поэтому здесь применим непараметрический критерий Манна-Уитни [2].

Формулируем статистическую гипотезу.

Нулевая гипотеза (H_0). Количество глаголов в «Волшебнике» и «Тайне» в среднем не различаются.

Конкурирующая гипотеза (H_1). Между количествами глаголов в «Волшебнике» и «Тайне» существует статистически значимое различие.

Для вычисления статистики критерия необходимо сначала объединить обе выборки и проранжировать их по неубыванию, а затем снова разделить признаки и отдельно найти суммы рангов.

Таблица 7

X_1	14	15	17	20	20	20	21	21	27	32	Сумма
Ранг X_1	3	6	10	12	12	12	14,5	14,5	19	20	123
X_2	11	13	15	15	15	15	16	22	23	26	
Ранг X_2	1	2	6	6	6	6	9	16	17	18	87

Далее вычисляется эмпирическое значение критерия:

$$U_{эм.} = n^2 + \frac{n(n+1)}{2} - S_1 = 100 + 55 - 123 = 32.$$

По таблице критерия Манна-Уитни находим критические значения при $k_1 = k_2 = 10$ степенях свободы и уровнях значимости 0,05 и 0,01:

$$U_{\text{крит}}(0,05) = 27; U_{\text{крит}}(0,01) = 19.$$

Построим ось статистики критерия Манна-Уитни для количественного сравнения глаголов (рис. 5).

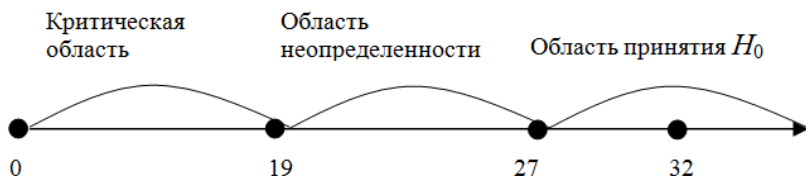


Рис. 5. Ось статистики для критерия Манна-Уитни

Так как эмпирическое значение попало в зону значимости, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Статистически значимого различия количества глаголов в «Волшебнике» и «Тайне» не обнаружено.

Проведённое исследование лексического состава произведений А.М. Волкова на примере первой («Волшебник Изумрудного города», 1939) и последней («Тайна заброшенного замка», 1982) книг цикла выявило значительные закономерности в эволюции авторского стиля на протяжении более сорока лет творчества.

Результаты анализа показали, что в ранних произведениях писателя превалирует использование глаголов над прилагательными. Это свидетельствует о доминировании действия в повествовании, что обусловлено жанровыми и сюжетными особенностями сказочных произведений для детей младшего возраста. Высокая частота глаголов обеспечивает динамичность повествования, создаёт впечатление движения и развития событий, что облегчает восприятие текста детским читателем и поддерживает его внимание.

В последней книге цикла наблюдается качественное изменение лексического состава: количество глаголов и прилагательных приблизительно уравнивается. Это указывает на то, что текст позднего произведения становится более сложным в структурном отношении. Увеличение доли прилагательных означает расширение описательных фрагментов, более подробную характеристику предметов и явлений, что предполагает повышение уровня восприятия текста для читателя среднего школьного возраста.

Однако количественный анализ частоты глаголов в обоих произведениях не выявил статистически значимых различий. Это позволяет заключить, что насыщенность действия, событийность произведений остаёт-

ся примерно одинаковой. При этом, учитывая примерно равное соотношение глаголов и прилагательных в последней книге цикла, можно утверждать, что общий уровень сложности восприятия обоих произведений остаётся доступным для младшего школьного возраста, хотя последняя книга предъявляет несколько повышенные требования к читательской подготовке.

Таким образом, статистический анализ лингвистического материала позволяет выявить закономерности в развитии художественного мастерства писателя и оценить авторский стиль. Кроме того, исследование частеречного состава текста дает возможность определять целевую аудиторию произведения, основываясь не на субъективном восприятии конкретного читателя, а на строгих математических расчетах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Макаренко Ф.Д.* Роль, место и частота употребления самостоятельных и служебных частей речи в тексте // Молодой ученый. 2016. № 2 (106). С. 908-912. URL: <https://moluch.ru/archive/106/22311> (дата обращения: 23.12.2025).
2. *Кокорина И.В.* Основы математической обработки информации в филологии: комбинаторика, теория вероятностей и математическая статистика: учеб.-метод. пособие. Архангельск: Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, 2014 .115 с.

УДК 330.4

Е. Ю. Лискина, Л. А. Максимова

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина
Россия, г. Рязань, e-mail: katelis@yandex.ru, lyiza.maksimova@mail.com

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОМЫШЛЕННОГО ПОТЕНЦИАЛА
РЕГИОНОВ ЦЕНТРАЛЬНОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА:
ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
НА ОСНОВЕ ОБНОВЛЕННОЙ ЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ**

В статье продолжается исследование промышленного потенциала регионов Центрального федерального округа. По сравнению с предшествующими исследованиями этой проблемы была усовершенствована логическая модель факторов промышленного развития, интегрирующая производственный, финансовый, кадровый, демографический, инновационный и инфраструктурный потенциалы. В качестве объясненной переменной выбран объем отгруженных товаров собственного производства на душу населения. Исследование проводится для 2022 и 2023 гг. Построена корреляционная матрица зависимой переменной и набора факторов. Выполнен анализ мультиколлинеарности модели через показатель VIF. Выявлены факторы, оказывающие наиболее сильное влияние на объясненную переменную. Для каждого года построены линейные и нелинейные регрессионные модели, отобраны статистически значимые факторы.

Ключевые слова: промышленный потенциал, эконометрическое моделирование, корреляционный анализ, логическая модель, уравнение регрессии

E. Y. Liskina, L. A. Maximova

S.A. Esenin Ryazan State University
Russia, Ryazan, e-mail: katelis@yandex.ru, lyiza.maksimova@mail.com

**MODELLING THE INDUSTRIAL POTENTIAL
OF REGIONS OF THE CENTRAL FEDERAL DISTRICT:
AN ECONOMETRIC ANALYSIS BASED
ON AN UPDATED LOGICAL MODEL**

This article continues the investigation into the industrial potential of regions within the Central Federal District. Compared to prior studies on this issue, the logical model of factors for industrial development has been refined, integrating production, financial, human resources, demographic, innovation, and infrastructure potentials. The volume of shipped self-manufactured goods per capita is selected as the explained variable. The research is conducted for 2022 and 2023. A correlation matrix of the dependent variable and the set of factors is constructed. An analysis of multicollinearity within the model is performed using the Variance Inflation Factor (VIF). Factors exerting the

strongest influence on the explained variable are identified. For each year, linear and non-linear regression models are developed, and statistically significant factors are selected.

Keywords: *industrial potential, econometric modeling, correlation analysis, logical model, regression equation*

Введение. Актуальность исследования промышленного потенциала регионов обусловлена его ключевой ролью в обеспечении устойчивого экономического роста [1]. В условиях структурных преобразований и необходимости импортозамещения определение ключевых факторов промышленного развития становится критически важной задачей для формирования эффективной региональной политики. Анализ методологических подходов к исследованию и собственно исследованию промышленного потенциала регионов, муниципальных образований посвящено достаточно большое количество работ (см., например, обзоры в [2–5]). Данное исследование продолжает работу, начатую в [2, 6], с целью актуализировать модель промышленного потенциала регионов Центрального федерального округа (ЦФО), сделать модель более устойчивой к данным и выявить влияние вызовов современности.

Логическая факторная модель. В качестве объясняющей переменной Y в данном исследовании выбран объем отгруженных товаров собственного производства на душу населения. Это отличает нашу работу от ряда предыдущих исследований, использовавших в качестве Y валовой региональный продукт (ВРП) [2, 6]. Выбор нового признака обусловлен соображениями доступности и оперативности статистических данных, поскольку данные по ВРП с 2022 года публикуются с трехгодичным лагом. Также в данном исследовании предполагается, что на объем отгруженных товаров собственного производства на душу населения влияют производственный, финансовый, кадровый, демографический, инновационный и инфраструктурный потенциалы. Разделение человеческого потенциала на кадровый и демографический обусловлено различной природой этих интегральных показателей и их вкладом в промышленное производство. В инновационный потенциал добавлен новый показатель – число патентных заявок на изобретения на душу населения. Новая логическая факторная модель представлена в таблице 1.

Описание данных. На основании предложенной логической модели по данным Федеральной службы государственной статистики [7] сформирован массив данных объясненной переменной Y и предикторов X_1 – X_{18} по регионам ЦФО за 2022–2023 годы. Следует отметить, что в 2022 году отсутствовали значения по показателю X_5 , а за 2023 год — по показателям X_4 , X_5 , X_{13} .

Таблица 1. Факторы, определяющие промышленный потенциал региона

Обозначение	Экономический показатель	Единица измерения	Потенциал
X_1	Стоимость основных фондов обрабатывающих производств на душу населения	тыс. руб./ тыс. чел.	Производственный
X_2	Доля организаций обрабатывающих производств в общем числе организаций	-	
X_3	Степень износа основных фондов обрабатывающих производств (на конец года)	%	
X_4	Доля инвестиций в основной капитал обрабатывающих производств в ВРП	%	Финансовый
X_5	Объём иностранных инвестиций на душу населения	тыс. руб./ тыс. чел.	
X_6	Объём инвестиций в основной капитал обрабатывающих производств на душу населения	тыс. руб./ тыс. чел.	
X_7	Доля работников с высшим образованием в общей численности занятых	%	Кадровый
X_8	Доля работников со средним профессиональным образованием в общей численности занятых	%	
X_9	Доля студентов программ высшего образования в общей численности населения	%	
X_{10}	Доля занятых в обрабатывающих производствах в общей численности занятых	%	Человеческий
X_{11}	Доля экономически активного населения в общей численности населения	%	
X_{12}	Доля организаций, выполнявших научные исследования и разработки в общем числе организаций	-	Инновационный
X_{13}	Внутренние затраты на научные исследования и разработки по отношению к ВРП	-	
X_{14}	Численность персонала, занятого исследованиями и разработками на душу населения	-	
X_{15}	Число патентных заявок на изобретения на душу населения	-	
X_{16}	Плотность железнодорожных путей общего пользования	км на 1000 км ²	
X_{17}	Плотность автомобильных дорог с твердым покрытием	км на 1000 км ²	Инфраструктурный
X_{18}	Мощность электростанций	млн. кВт	

Методы и инструменты исследования. В исследовании использовались методы корреляционного и регрессионного анализа. Вычисления проводились с использованием библиотек pandas, numpy, matplotlib.pyplot языка программирования Python на уровне значимости 0,05.

Результаты исследования. На первом этапе исследования были построены парные диаграммы рассеяния $(X_i; Y)$, $i = \overline{1;18}$, и описательной статистики. В процессе спецификации нелинейной модели проведен последовательный анализ парных регрессий с тестированием альтернативных функциональных форм (линейной, квадратичной, логарифмической, экспоненциальной), где на каждом шаге выбиралась зависимость с максимальным значением коэффициента детерминации R^2 .

На втором этапе был выполнен корреляционный анализ, результаты которого для 2022 и 2023 годов представлены на рис. 1 и 2 соответственно, а также в таблице 2 (в скобках указаны значения коэффициентов корреляции r_{YX_i}).

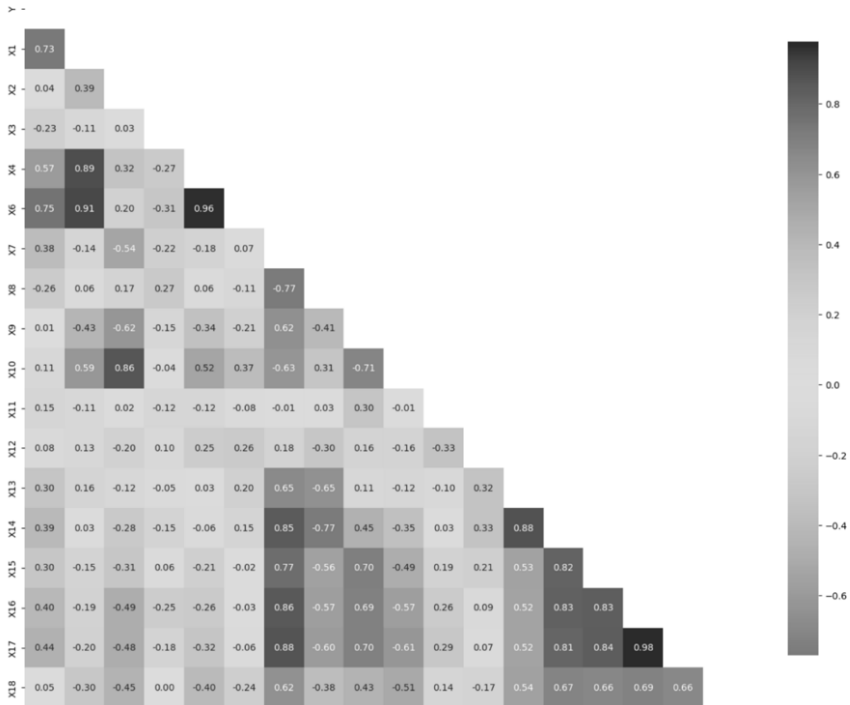


Рис. 1. Треугольная матрица корреляций за 2022 г.

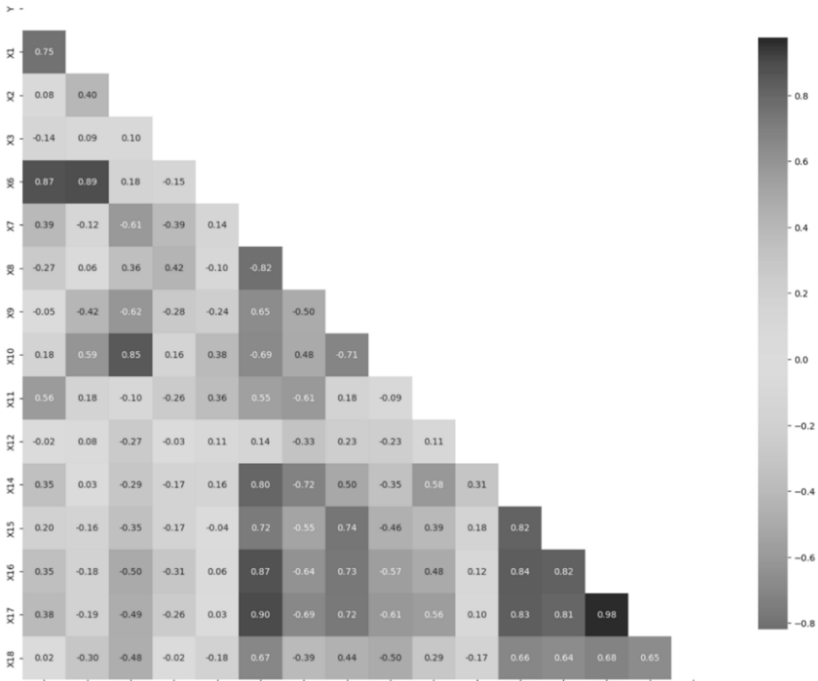


Рис. 2. Треугольная матрица корреляций за 2023 г.

Корреляционный анализ показал, что наиболее сильную положительную связь с результативным показателем в 2022 и 2023 гг. демонстрируют факторы X_1 (стоимость основных фондов обрабатывающих производств) X_6 (объем инвестиций в основной капитал обрабатывающих производств). Фактор, оказывающий заметное положительное влияние на Y меняется с X_4 (доли инвестиций в основной капитал обрабатывающих производств в ВРП) в 2022 г. на X_{11} (долю экономически активного населения в общей численности населения) в 2023 г. Кроме того, в 2023 г. сократилось число факторов, оказывающих умеренное положительное влияние на величину объясненной переменной. Выявлена высокая степень коллинеарности между факторами инновационного и инфраструктурного потенциалов, при этом к 2023 г. количество факторов, коррелирующих между собой, уменьшается. Проблемным с точки зрения корреляции с остальными факторами является фактор X_7 (доля работников с высшим образованием в общей численности занятых).

Таблица 2. Итоги корреляционного анализа факторов промышленного потенциала

Степень связи	Значение коэффициента корреляции	2022	2023
Высокая	$ r_{YX_i} \in (0,7; 0,9]$	$X_1 (0,73), X_6 (0,75)$	$X_1 (0,75), X_6 (0,87)$
Заметная	$ r_{YX_i} \in (0,5; 0,7]$	$X_4 (0,57)$	$X_{11} (0,56)$
Умеренная	$ r_{YX_i} \in (0,3; 0,5]$	$X_7 (0,36), X_{13} (0,30), X_{14} (0,39), X_{15} (0,30), X_{16} (0,40), X_{17} (0,44)$	$X_{14} (0,35), X_{16} (0,35), X_{17} (0,38)$
Наличие коллинеарности между регрессорами	$ r_{X_j X_i} \geq 0,75$	X_1 с X_4, X_6 ; X_4 с X_6 ; X_2 с X_{10} ; X_{16} с X_{17} ; X_7 с $X_8, X_{14}, X_{15}, X_{16}, X_{17}$; X_{14} с $X_8, X_{13}, X_{16}, X_{17}$; X_{15} с X_{16}, X_{17}	X_1 с X_6 ; X_2 с X_{10} ; X_{16} с X_{17} ; X_7 с $X_8, X_{14}, X_{16}, X_{17}$; X_{15} с X_{16}, X_{17} ;

Далее проводилась проверка регрессоров на мультиколлинеарность с использованием коэффициентов VIF (variance inflation factor) на основе уравнений множественной линейной регрессии вида

$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^{18} a_i X_i + \varepsilon, \quad t \in \{2022; 2023\}, \quad (1)$$

в результате которой был составлен рейтинг всех показателей VIF для 2022 и 2023 гг. Первые 10 позиций в рейтингах показателей VIF для 2022–2023 гг. представлены в таблице 3, из которой следует, что показатели X_1 – X_{18} в совокупности в высокой степени коррелированы между собой (VIF > 5).

На третьем этапе проводилось построение уравнений множественной линейной регрессии вида (1) и множественной нелинейной регрессии вида

$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^k F_i(X_i) + \varepsilon, \quad t \in \{2022; 2023\} \quad (2)$$

где $F_i(X_i)$ — выбранная функциональная форма для переменной X_i , методом включения. На каждой итерации выбиралась переменная, которая да-

вала наибольший прирост коэффициента детерминации R^2 . Параллельно отслеживалось снижение остаточной дисперсии S^2 . Динамика показателей R^2 и S^2 для 2022 и 2023 гг. представлены на рис. 3–10.

Таблица 3. Рейтинг показателя VIF за 2022–2023 годы

Позиция в рейтинге	2022 год		2023 год	
	Фактор	Значение VIF	Фактор	Значение VIF
1	X_3	15,84	X_{12}	12,89
2	X_{12}	74,25	X_9	14,83
3	X_7	154,84	X_{15}	16,63
4	X_9	385,99	X_{18}	29,39
5	X_8	417,29	X_3	33,93
6	X_{11}	699,81	X_{10}	35,56
7	X_{18}	748,05	X_8	46,06
8	X_{15}	1619,17	X_2	56,29
9	X_2	1801,99	X_{11}	58,55
10	X_1	3650,14	X_1	60,21

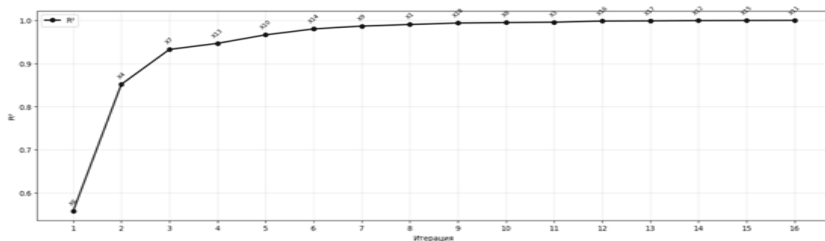


Рис. 3. Динамика R^2 для линейной модели за 2022 г.

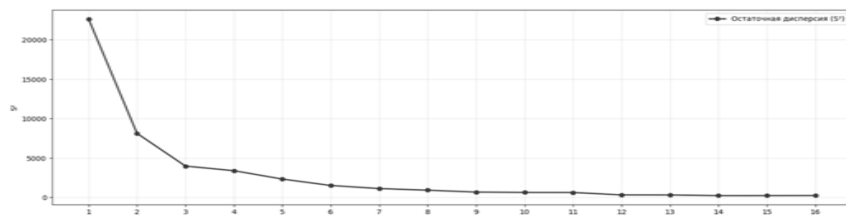


Рис. 4. Динамика S^2 для линейной модели за 2022 г.

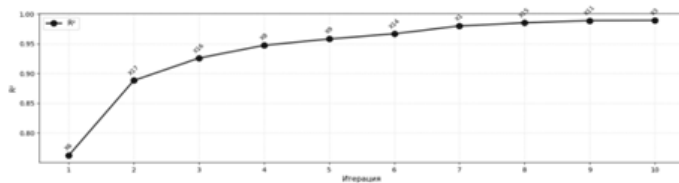


Рис. 5. Динамика R^2 для линейной модели за 2023 г.

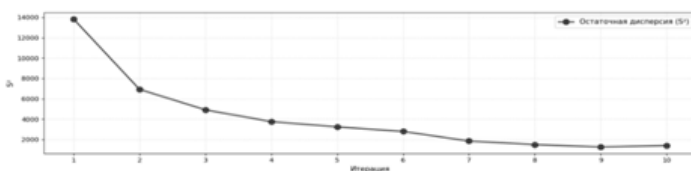


Рис. 6. Динамика S^2 для линейной модели за 2023 г.

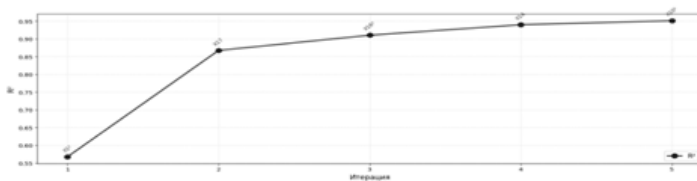


Рис. 7. Динамика R^2 для нелинейной модели за 2022 г.

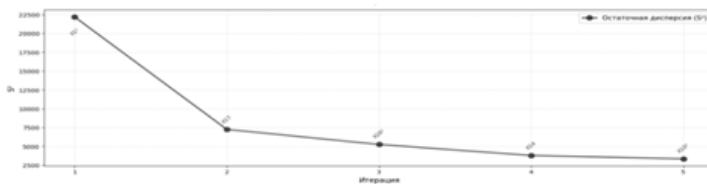


Рис. 8. Динамика S^2 для нелинейной модели за 2022 г.

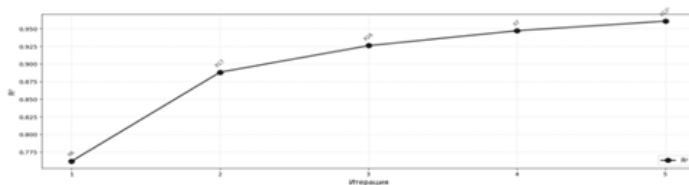


Рис. 9. Динамика R^2 для нелинейной модели за 2023 г.

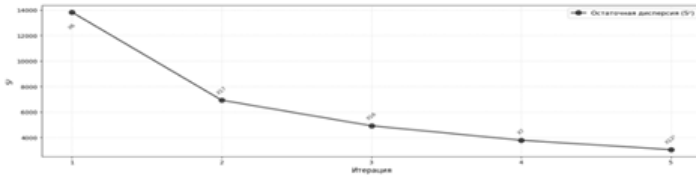


Рис. 10. Динамика S^2 для нелинейной модели за 2023 г.

По итогам метода включения были построены следующие линейные регрессионные уравнения вида (1) с наилучшим составом переменных для 2022 и 2023 годов:

$$Y_{2022} = 146,89 + 4,39X_3 - 35381,78X_4 + 63,27X_6 - 10,77X_8 - 3863,36X_9 - 11322,19X_{13} + 0,24X_{16} - 20,83X_{17} + \varepsilon; \quad (3)$$

$$Y_{2023} = 197,22 + 0,72X_1 - 7,94X_6 - 4679,94X_9 - 25,91X_{14} + 0,45X_{17} + \varepsilon; \quad (4)$$

а также нелинейные регрессионные уравнения вида (2):

$$Y_{2022} = 0,002X_1^2 + 0,33X_{10}^2 - 19,44X_{14} - 0,00024X_{16}^2 + 0,74X_{17} + \varepsilon; \quad (5)$$

$$Y_{2023} = 392,59 + 16,18X_6 - 10,08X_7 - 0,53X_{16} + 0,68X_{17} + \varepsilon. \quad (6)$$

С точки зрения объясняющей способности, все модели демонстрируют сопоставимые, но не однозначные результаты. В 2022 году нелинейная модель (5) показывает более высокое значение коэффициента детерминации ($R^2=0,996092$ против $R^2=0,994741$ у линейной (3)), что может говорить о наличии нелинейных паттернов в данных этого периода. Однако стандартная ошибка у нелинейной модели (5) почти в два раза выше, чем у линейной (3) (56,455288 против 30,937970), указывая на потенциальную меньшую точность прогнозов. В 2023 году ситуация меняется: линейная модель (4) превосходит нелинейную (6) по всем ключевым метрикам, что свидетельствует о ее явном преимуществе для данных этого года. Интересно, что в 2023 году в модель (6) не вошли нелинейные слагаемые.

На четвертом этапе были проверены условия Гаусса–Маркова для уравнений (3)–(6). Было показано, что линейные модели (3) и (5) для обоих лет полностью удовлетворяют всем предпосылкам. Это подтверждает надежность и несмещенность полученных оценок. Для нелинейной модели (6) одно из условий нарушается – гипотеза о нулевом математическом

ожидании остатков отвергается, что может говорить об отсутствии в модели некоторых значимых факторов.

Выводы. Проведенное исследование показало возможность использования в качестве объясненной переменной Y объема отгруженных товаров собственного производства на душу населения.

Перспективы дальнейшего исследования. В дальнейшем предполагается дополнить данные значениями показателей $X_1 - X_{18}$ за период с 2010 по 2021 гг. и за 2024 г., построить панель данных и исследовать влияние указанных факторов на переменную Y , выявить региональные различия в развитии промышленного потенциала регионов ЦФО, а также — влияние экономических кризисов и политических событий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ларионов А.О.* Оценка промышленного потенциала региона // Проблемы развития территорий. 2015. Вып. 2 (78). С. 45–61.
2. *Лискина Е. Ю.* Математические моделирование промышленного потенциала регионов Российской Федерации / Е.Ю. Лискина, А.С. Андреев // Вестник Рязанского государственного университет имени С.А. Есенина. 2019. № 2 (63). С. 176–182.
3. *Глезман Л.В.* Значимые пространственно-отраслевые факторы экономического развития региона в условиях цифровизации / Л.В. Глезман, А.А. Урасова // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Экономика. 2022. № 1. С. 31–42. <https://doi.org/10.24143/2073-5537-2022-1-31-42>.
4. *Баева Д.Р.* Теоретические аспекты регионального промышленного потенциала // Экономика и бизнес: теория и практика. 2024. № 11-1 (117). С. 62–64. DOI: 10.24412/2411-0450-2024-11-1-62-66.
5. *Кисленок А.А.* Формирование методического подхода к оценке потенциала развития муниципальных образований / А.А. Кисленок, Е.А. Сухарева // Вестник Московского университета. Серия 6. Экономика. 2025. № 60 (1). С. 304–331. DOI: <https://doi.org/10.55959/MSU0130-0105-6-60-1-14>.
6. *Лискина Е. Ю.* Исследование временных эффектов производственного потенциала субъектов Центрального федерального округа с помощью стандартной модели панельных данных / Е.Ю. Лискина, Р.С. Румянцев // Современные технологии в науке и образовании СТНО-2022: сб. тр. V междунар. науч.-техн. форума. В 10 т. Т. 5. / под общ. ред. О.В. Миловзорова. Рязань: Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2022. С. 24–29.
7. Регионы России. Социально-экономические показатели : статистический сборник. 2022–2024 гг. // Федеральная служба государственной статистики: [сайт]. URL: <https://rosstat.gov.ru/folder/210/document/13204>.

УДК 004.94

О. Ю. Марьясин, С. А. Бычков

Ярославский государственный технический университет
Россия, Ярославль, e-mail: maryasinou@yustu.ru, semkab-76@mail.ru

ТРИ ПОДХОДА К МОДЕЛИРОВАНИЮ ДВИЖЕНИЯ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Рассмотрены различные подходы к моделированию беспилотных летательных аппаратов на основе уравнений Ньютона-Эйлера, Лагранжа и модели машины Дубинса. Все методы моделирования имеют свои преимущества и недостатки, что влияет на их применимость и эффективность в различных инженерных задачах. Приведены практические рекомендации по выбору моделей, в зависимости от решаемой задачи и типа беспилотного летящего аппарата. Отмечена важность интеграции рассмотренных подходов в единую иерархическую систему управления, позволяющую эффективно решать задачи на разных временных и пространственных масштабах, от планирования миссии до мгновенной стабилизации аппарата при действии внешних возмущений.

Ключевые слова: беспилотные летательные аппараты, динамические модели, метод Ньютона-Эйлера, метод Лагранжа, машина Дубинса

O. Yu. Maryasin, S. A. Bychkov

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: maryasinou@yustu.ru, semkab-76@mail.ru

THREE APPROACHES TO MODELING THE MOVEMENT OF UNMANNED AERIAL VEHICLES

The paper describes various approaches to modeling unmanned aerial vehicles based on the Newton-Euler and Lagrange equations, as well as the Dubins machine model. Each modeling method has its own advantages and disadvantages, which influences their applicability and effectiveness in various engineering problems. Practical recommendations are provided for choosing models, depending on the problem being solved and the type of unmanned aerial vehicle. The importance of integrating the considered approaches into a single hierarchical control system is noted, enabling effective problem solving at various temporal and spatial scales, from mission planning to instantaneous stabilization of the vehicle under external disturbances.

Keywords: unmanned aerial vehicles, dynamic models, Newton-Euler method, Lagrange method, Dubins machine

Введение. Одной из основных проблем в разработке беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) является выбор адекватной математической модели, которая обеспечивает оптимальный баланс между практическими потребностями, точностью описания и вычислительной эффективностью. В данной работе анализируются три основных подхода к моделированию БПЛА: метод Ньютона-Эйлера, метод Лагранжа и машина Дубинса. Современный аппарат кватернионов в данной работе не рассматривается, так как он является развитием подхода Ньютона-Эйлера и, кроме того, предполагается, что БПЛА не предназначен для выполнения агрессивных маневров, акробатических трюков и петель.

Такое разнообразие подходов к моделированию БПЛА может сбить с толку начинающих исследователей и привести к неэффективному решению. Поэтому цель данной работы – предоставить исследователям-робототехникам системный анализ подходов к моделированию БПЛА и сформулировать практические рекомендации по их выбору, в зависимости от решаемой задачи, типа БПЛА, требуемого уровня детализации и доступных вычислительных ресурсов. В работе рассматривается два основных типа БПЛА: мультироторные (квадрокоптеры) и типа фиксированное крыло (самолетного типа). Все модели имеют свои уникальные преимущества и недостатки, что влияет на их применимость и эффективность в различных инженерных задачах.

1. Модели БПЛА. Для описания движения БПЛА традиционно используются несколько систем координат, основными из которых являются инерциальная (земная) и связанная с телом аппарата [1], [2]. Инерциальная система (E-frame) связана с землей и используется для глобального позиционирования и навигации. В ней определяются координаты центра масс аппарата и его линейные скорости. Связанная система (B-frame) связана с корпусом БПЛА, ее центр координат обычно совмещается с центром масс аппарата. В этой системе удобно описывать силы тяги, моменты вращения и показания бортовых датчиков, таких как гироскопы и акселерометры.

Состояние БПЛА в пространстве полностью описывается 12-мерным вектором состояния $X = [x, y, z, \varphi, \theta, \psi, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, p, q, r]^T$, где (x, y, z) – вектор координат центра масс, (φ, θ, ψ) – вектор углов Эйлера (крен, тангаж, рыскание), $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ – вектор линейных скоростей, (p, q, r) – вектор угловых скоростей в связанной системе координат. БПЛА имеет шесть степеней свободы: три координаты центра масс и три угла.

При выводе уравнений движения БПЛА обычно принимают следующие упрощающие допущения:

- корпус БПЛА абсолютно жесткий;
- платформа летательного аппарата абсолютно симметричная;

- угловые скорости вращения пропеллеров можно изменять моментально, пренебрегая динамикой привода с пропеллером;
- некоторые аэродинамические эффекты часто не учитываются: сопротивление воздуха, ветер, эффект отражения потока воздуха от земли при посадке и взлете, и другие.

Метод Ньютона-Эйлера представляет собой прямой, интуитивно понятный подход, основанный на раздельном применении второго закона Ньютона для поступательного движения и уравнений Эйлера для вращения твердого тела. Линейное ускорение центра масс БПЛА в инерциальной системе координат определяется векторной суммой всех внешних сил. Для БПЛА это означает, что его положение в инерциальной системе координат будет изменяться в зависимости от суммы сил тяги двигателей, гравитации и других сил [3]. Эти силы обычно вычисляются в связанной системе координат и затем преобразуются в инерциальную систему с помощью матрицы вращения R .

В базовом виде уравнение выглядит следующим образом

$$m\ddot{\xi} = G + RF_B, \quad (1)$$

где m – масса БПЛА; $\ddot{\xi}$ – вектор линейного ускорения, $G = [0, 0, -mg]^T$; g – ускорение свободного падения; F_B – вектор суммарной тяги роторов в связанной системе. Для квадрокоптера $F_B = [0, 0, F_{Z_B}]^T$, где F_{Z_B} – проекция подъемной силы на ось Z в связанной системе. В более точных моделях и для БПЛА типа фиксированное крыло в это уравнение добавляется вектор сил аэродинамического сопротивления F_{dg} и другие внешние силы, действующие на аппарат.

Вращательное движение БПЛА в связанной системе координат описывается уравнением Эйлера, которое связывает приложенные моменты с изменением угловой скорости

$$I\dot{\omega} + \omega \cdot (I\omega) = M_B, \quad (2)$$

где I – тензор момента инерции; $\omega = [p, q, r]^T$ – вектор угловой скорости в связанной системе; M_B – вектор крутящих моментов (крен, тангаж, рыскание).

Преимущество метода Ньютона-Эйлера (1), (2) заключается в его прозрачности и высокой физической достоверности [4]. Каждая компонента уравнения имеет прямую физическую интерпретацию. Исследователь может легко проследить, как каждая сила и момент влияют на движение. Например, у квадрокоптера управляющие моменты крена и тангажа соз-

даются за счет разности тяг противоположных роторов, а момент рыскания – за счет суммы их реактивных моментов. Метод Ньютона-Эйлера считается вычислительно эффективным, особенно для систем с хорошо понятными силами и моментами, такими как квадрокоптеры.

Подход Лагранжа представляет собой альтернативу методу Ньютона-Эйлера, которая описывает динамику системы через ее энергетические характеристики – кинетическую и потенциальную энергию. Центральным элементом этого подхода является функция Лагранжа (Лагранжиан), определяемая как разность между полной кинетической и потенциальной энергией системы

$$L = T - V, \quad (3)$$

где T – кинетическая энергия, V – потенциальная энергия системы.

Уравнения движения выводятся из уравнения Эйлера-Лагранжа, для каждой из обобщенных координат $q = [x, y, z, \varphi, \theta, \psi]^T$ [2]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad (4)$$

где Q_i – обобщенные силы, соответствующие координате q_i . Для координат положения Q_i – это компоненты вектора тяги в инерциальной системе, а для угловых координат – это соответствующие моменты.

Преимущество метода Лагранжа (3), (4) заключается в его универсальности, возможности получения аналитических выражений и эффективности при работе с голономными ограничениями [5]. Еще одним преимуществом является то, что метод Лагранжа приводит к уравнениям, которые не зависят от выбора системы координат, упрощая процесс анализа системы. Основным недостатком метода является потенциально «взрывной» рост сложности аналитических выражений при увеличении числа степеней свободы. В то же время, для относительно простых систем, таких как квадрокоптер, имеющих всего шесть степеней свободы, метод Лагранжа является эффективным и позволяет получить точные уравнения динамики.

При выборе между двумя рассмотренными подходами для моделирования БПЛА необходимо учитывать их специфику. Для квадрокоптеров, где тяга каждого двигателя может быть явно определена и приложена как сила в связанной системе координат, метод Ньютона-Эйлера часто оказывается более интуитивно понятным. На основе полной нелинейной модели, выведенной с помощью метода Ньютона-Эйлера, проектируются внутренние контуры управления, такие как PID, LQR, или MPC [4]. Для квадрокоптеров и БПЛА с фиксированным крылом метод Ньютона-Эйлера остается доминирующим и практически наиболее удобным инструментом.

Таким образом, динамические модели на основе методов Ньютона-Эйлера или Лагранжа служат основой для любого серьезного анализа и синтеза систем управления, позволяя точно предсказывать, как БПЛА будет реагировать на команды двигателей, и, обеспечивая возможность спроектировать контроллеры, способные управлять им в реальном времени, компенсируя внешние возмущения и выполняя сложные маневры. Однако эта точность достигается ценой повышенной вычислительной сложности и необходимости в точных знаниях параметров модели, таких как масса, тензор инерции и аэродинамические коэффициенты.

Модель машины Дубинса полностью абстрагируется от масс и сил, фокусируясь на геометрических ограничениях движения. Основное предположение модели Дубинса заключается в том, что объект движется с постоянной скоростью v и имеет ограниченный радиус поворота ρ [6]. Эта модель возникла как решение чисто геометрической задачи – найти кратчайший путь между двумя точками в пространстве, где каждая точка характеризуется не только своей позицией, но и направлением движения (ориентацией). Основная идея заключается в том, что реальные летательные аппараты имеют физические ограничения на свою способность маневрировать, в частности, на максимальную скорость поворота, что эквивалентно наличию минимального радиуса разворота. Кривые Дубинса формально описывают все возможные траектории, которым такой аппарат может следовать, начиная и заканчивая свой путь в заданных точках с заданными ориентациями. Это позволяет планировать пути, которые БПЛА может пролететь, не нарушая ограничений на маневренность.

В модели машины Дубинса движение в плоскости XY описывается системой уравнений

$$\dot{x} = v \cos \psi , \quad (5)$$

$$\dot{y} = v \sin \psi , \quad (6)$$

$$\dot{\psi} = u, |u| \leq \frac{v}{\rho} , \quad (7)$$

где u – управляющее воздействие.

Математически, кривые Дубинса (5)–(7) в двумерном пространстве представляют собой последовательности элементарных сегментов: прямой линии и дуг окружностей минимального радиуса [7]. Любая допустимая траектория между двумя заданными конфигурациями (позиция + ориентация) может быть представлена одной из шести возможных комбинаций этих сегментов: RSR, RSL, LRL, LSL, LSR, SLS (где L и R обозначают поворот по часовой стрелке или против, а S – прямой ход). Длина самой короткой такой траектории и ее конфигурация зависят от относительного

положения и ориентации начальной и конечной точек. Хотя первоначально это была чисто геометрическая проблема, было установлено, что кривые Дубинса являются решением задачи оптимального управления, в которой цель – минимизировать длину траектории при ограничении на угол поворота [8].

Расширение 2D-модели Дубинса на трехмерное пространство является нетривиальной задачей, поскольку движение в 3D-пространстве более сложное. Простейшая попытка расширить 2D-кривые Дубинса на 3D-пространство заключается в линейной интерполяции по высоте (z -координате) [9]. При таком подходе горизонтальная часть траектории вычисляется как стандартная 2D-кривая Дубинса, а z -координата меняется линейно между начальным и конечным значениями. Однако этот метод имеет существенный недостаток. Он нарушает условие непрерывности первой производной в вертикальной плоскости.

Чтобы решить эту проблему, были предложены 3D-модели, которые накладывают явные ограничения на кривизну траектории в горизонтальной и вертикальной плоскостях [9]. В 3D-модели Дубинса добавляется координата высоты z и угол наклона траектории (тангажа) γ . Уравнения принимают следующий вид

$$\dot{x} = v \cos \psi \cos \gamma, \quad (8)$$

$$\dot{y} = v \sin \psi \cos \gamma, \quad (9)$$

$$\dot{z} = v \sin \gamma, \quad (10)$$

$$\dot{\psi} = u, |u| \leq \frac{v}{\rho}, \quad (11)$$

$$|\gamma| \leq \gamma_{\max}. \quad (12)$$

Особенностью трехмерной модели (8)–(12) является необходимость классификации путей в зависимости от требуемого набора высоты, что приводит к трем основным случаям:

1) Low Altitude Gain. Набор высоты незначителен, и стандартного пути достаточно для его выполнения.

2) Medium Altitude Gain. Требуется дополнительные маневры, например, увеличение радиуса дуги, для достижения целевой высоты.

3) High Altitude Gain. Для значительного набора высоты требуется выполнение спиральных сегментов траектории.

Главное достоинство модели машины Дубинса – это ее низкая вычислительная сложность. Что делает ее идеальным инструментом для таких задач, как глобальное планирование маршрутов, навигация и обход препятствий в реальном времени. Недостатком модели является ее физи-

ческая недостоверность. Она не содержит информации о времени, скорости, ускорении или силах, необходимых для прохождения вычисленного геометрического пути. Поэтому кривые Дубинса не могут использоваться для синтеза контроллеров БПЛА. Они могут служить исключительно для определения целевой траектории для систем управления верхнего уровня.

2. Применение моделей в зависимости от типа БПЛА. Подавляющее большинство исследований и практических систем управления используют метод Ньютона-Эйлера для вывода уравнений движения квадрокоптера [4]. Этот подход полностью соответствует физической природе квадрокоптера, где управление осуществляется за счет регулирования тяги четырех двигателей. Каждый двигатель создает силу, направленную вверх, а векторная сумма этих сил определяет общую тягу, которая противодействует гравитации и создает вертикальное ускорение. Разница в тягах между соседними двигателями создает вращающие моменты вокруг осей аппарата, что позволяет управлять его ориентацией (наклоном) и, как следствие, его движением в горизонтальной плоскости.

Для синтеза контроллеров квадрокоптеров часто используется линеаризация полной нелинейной модели в окрестности точки зависания, где система находится в состоянии равновесия. Однако для приложений, требующих выполнения сложных маневров, используются полные нелинейные динамические модели, позволяющие точно предсказать поведение БПЛА и управлять им в широком диапазоне режимов полета. Таким образом, динамические модели Ньютона-Эйлера или Эйлера-Лагранжа являются основой для проектирования и управления квадрокоптерами.

Модель машины Дубинса основана на жестком ограничении на минимальный радиус разворота. Квадрокоптеры не имеют такого жесткого ограничения. Они могут совершать развороты на месте, двигаться в любом направлении (включая боковое смещение), и их способность к маневрированию определяется не минимальным радиусом, а, максимальными углами скоростями и ускорениями, а также максимальной тягой двигателей. Поэтому траектории, которые могут совершать квадрокоптеры, не ограничиваются комбинациями прямых линий и дуг окружностей минимального радиуса. Квадрокоптер может следовать за сложными, извилистыми траекториями, которые не могут быть описаны стандартными кривыми Дубинса. Таким образом, использование модели Дубинса для планирования пути квадрокоптера будет неадекватным, так как оно ограничит его движения до тех, что не соответствуют его реальным возможностям.

БПЛА с фиксированным крылом представляют собой иную категорию летательных аппаратов по сравнению с квадрокоптерами. Их движение в значительной степени определяется аэродинамическими силами, возникающими вследствие их движения по воздуху. Они не могут зависеть

на месте, не могут двигаться назад или перпендикулярно своему курсу. Динамическое моделирование БПЛА с фиксированным крылом является более сложной задачей. Главная сложность заключается в моделировании аэродинамических сил и моментов. В отличие от квадрокоптера, в БПЛА с фиксированным крылом аэродинамические силы являются функцией многих переменных. Коэффициенты подъемной силы, сопротивления и момента качения зависят от угла атаки α , угла скольжения β , угловых скоростей p, q, r и положений управляющих поверхностей (элеронов, руля высоты, руля направления) [3, 7]. Таким образом, динамическая модель БПЛА с фиксированным крылом представляет собой сложную систему нелинейных ОДУ, где входными данными являются команды управления, а выходными – изменение положения и ориентации аппарата во времени [7].

БПЛА с фиксированным крылом, подобно автомобилям, имеют жесткое ограничение на минимальный радиус разворота. Они не могут мгновенно изменить направление движения. Поэтому модель Дубинса успешно применяется для планирования путей для БПЛА с фиксированным крылом, поскольку она позволяет быстро находить геометрически допустимый путь, который удовлетворяет их ограничениям на непрерывное движение и минимальный радиус поворота [9].

Таким образом, для БПЛА с фиксированным крылом динамическая модель является ядром системы управления, позволяя точно рассчитывать команды двигателей и управляющих поверхностей для достижения желаемого состояния полета. Модель Дубинса, в свою очередь, служит высокоэффективным инструментом для планирования пути, который быстро генерирует физически осуществимые траектории, которые затем могут быть реализованы с помощью динамической модели. Такое сочетание моделей позволяет создавать комплексные системы автономного полета, где быстрое планирование пути на базе кинематических ограничений дополняется точным управлением движением на основе физических законов.

3. Интеграция и иерархия моделей. Иерархия управления БПЛА обычно состоит из нескольких уровней: высокоуровневого планирования пути (Path planning & Navigation), и низкоуровневого управления движением (Motion control & Stabilization). Каждый из этих уровней должен использовать наиболее подходящую модель для решения поставленной задачи.

Задача верхнего уровня – найти самый короткий и безопасный геометрический путь в трехмерном пространстве. Модель Дубинса, благодаря своей вычислительной эффективности, позволяет решать эту задачу практически в реальном времени, даже в динамично изменяющейся среде. Алгоритм планирования может быстро сгенерировать набор траекторий и выбрать из них оптимальную с точки зрения длины или безопасности. Важно отметить, что для БПЛА с фиксированным крылом эта модель яв-

ляется прямым и адекватным описанием их возможностей маневрирования, в то время как для квадрокоптеров она может служить лишь приближенным и упрощенным инструментом для генерации грубого плана движения.

Задача нижнего уровня заключается в преобразовании грубого геометрического пути, найденного на верхнем уровне, в гладкую и дифференцируемую траекторию. Здесь динамические модели начинают играть основную роль. На основе полной нелинейной модели Ньютона-Эйлера можно спроектировать контроллеры, которые будут стремиться следовать по заданной траектории [4]. Эти контроллеры могут учитывать реальные физические ограничения аппарата, такие как максимальная тяга, максимальные угловые скорости и ускорения, и генерировать необходимые команды для двигателей, чтобы БПЛА максимально точно следовал по намеченной траектории, компенсируя различные внешние возмущения.

Такой разделенный подход не только повышает общую производительность системы, но и делает ее более надежной и предсказуемой. Каждый уровень системы работает с той моделью, которая наиболее точно отражает задачу, которую он решает. Это позволяет избежать ситуации, когда пытаются решить все задачи сразу с помощью одной сложной модели, что приводит к чрезмерной вычислительной нагрузке и усложнению алгоритмов.

Заключение. Таким образом, в работе рассмотрены различные подходы к моделированию БПЛА на основе уравнений Ньютона-Эйлера, Лагранжа и модели машины Дубинса. Выбор между этими моделями или их комбинированное использование зависит от конкретной решаемой задачи, типа БПЛА, требуемого уровня детализации и доступных вычислительных ресурсов.

Для задач низкоуровневой стабилизации, разработки полетных контроллеров (firmware) и учета сложных физических эффектов (аэродинамика, гироскопия) рекомендуется использовать метод Ньютона-Эйлера. Рекурсивные алгоритмы реализации (Recursive Newton-Euler Algorithm) обеспечивают необходимую скорость для его работы в реальном времени на ограниченных вычислительных мощностях [5].

Для теоретических исследований, проектирования нелинейных и адаптивных систем управления предпочтительным выбором является подход Лагранжа. Инструменты типа MATLAB Symbolic Math Toolbox позволяют задать Лагранжиан и автоматически получить уравнения движения [9], что минимизирует человеческие ошибки в знаках и индексах.

Для систем автономной навигации и планирования миссий следует применять модель машины Дубинса. Она обеспечивает быструю генера-

цию геометрически выполнимых, плавных и энергетически эффективных траекторий.

Разработка современных БПЛА требует глубокого понимания и владения всеми подходами и умения их грамотно интегрировать в единую, иерархическую систему. Будущее моделирования автономных систем лежит в области дальнейшего сближения этих подходов, где модель машины Дубинса дополняется динамической точностью модели Ньютона-Эйлера и аналитической мощностью модели Лагранжа, что в совокупности позволяет создавать по-настоящему надежные и интеллектуальные автономные системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Барсегян В.Р.* Об одной задаче оптимального управления квадрокоптером с заданным промежуточным значением части координат фазового вектора / В.Р. Барсегян, Т.А. Симонян, А.Г. Матевосян // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2024. № 2. С. 59–72.
2. *Luukkonen T.* Modelling and control of quadcopter. URL: https://sal.aalto.fi/publications/pdf-files/eluu11_public.pdf (дата обращения 29.12.2024)
3. Six-Degree-of-Freedom Aircraft Landing Trajectory Planning with Runway Alignment / Т. Kim, А.Г. Kamath, N. Rahimi, В.Аçıkmeşe, M. Mesbahi // arXiv:2405.16680v1. 2024. P. 1–41.
4. *Rinaldi M.* A Comparative Study for Control of Quadrotor UAVs / M. Rinaldi, S. Primatesta, G. Guglieri // Applied Sciences. 2023. Vol. 13. P. 1–20.
5. Lagrangian vs. Newton-Euler Methods: Which is Better for Your Robot? URL: <https://eureka.patsnap.com/article/lagrangian-vs-newton-euler-methods-which-is-better-for-your-robot> (дата обращения 29.12.2024)
6. *Owen M.* Implementing Dubins Airplane Paths on Fixed-wing UAVs / M. Owen, R. Beard, T. McLain // Contributed chapter to the Handbook of Unmanned Aerial Vehicles. Springer, 2014. Ch. 68. P. 1677–1701.
7. Control of a fixed wing unmanned aerial vehicle using a robust fractional order controller / E.W. Metekia, W.A. Asfaw, С.М. Abdissa, L.N. Lemma // Scientific Reports. 2025. Vol. 15. P. 1–34.
8. *Gal O.* Fast and efficient visible trajectories planning for the Dubins UAV model in 3D built-up environments / O. Gal, Y. Doytsher // Robotica. 2014. Vol. 32, iss. 1. P. 143–163.
9. Derive Quadrotor Dynamics for Nonlinear Model Predictive Control. URL: <https://www.mathworks.com/help/symbolic/derive-quadrotor-dynamics-for-nonlinearMPC.html> (дата обращения 29.12.2024)

Содержание

МАТЕМАТИКА

1. **Башкин М.А.** Гармонические и Т-инвариантные формы..... 3
2. **Жаров А.Н., Миневичева И.Г.** О реализации метода опорных векторов с помощью субградиентного метода и метода проекции градиента..... 6
3. **Жаров А.Н., Миневичева И.Г.** О реализации L_1 регуляризации с помощью субградиентного и проксимального методов оптимизации..... 17
4. **Правдивцева А.С., Абрамов В.В.** Об одном методе решения оптимизационной параметрической задачи..... 32
5. **Ройтенберг В.Ш.** О бифуркациях контуров, образованных сепаратрисами трех седел, в типичных двухпараметрических семействах векторных полей с центральной симметрией..... 36
6. **Шиндина К.П., Абрамов В.В.** Приближенное решение матричной игры с числовым параметром..... 44

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

7. **Башкин М.А., Силин В.С.** Один из аспектов повышения качества преподавания фундаментальных дисциплин..... 48
8. **Васильева А.В., Березина Л.В.** О постановке и решении практико-ориентированных задач..... 52
9. **Васильева А.В., Березина Л.В., Олейникова Е.В.** О работе с цифровой лабораторией по математике..... 61
10. **Васильева А.В., Иванова А.Е., Житков Р.О.** О разработке чат-бота по теории вероятностей и математической статистике..... 66
11. **Горина О.М.** О развитии мотивации к изучению математики у учащихся..... 70
12. **Жовтан Л.В.** Школьная математика, реалии и перспективы: взгляд с позиции высшей школы..... 75
13. **Каримова Н.Т.** Методика использования информационной среды табличного процессора для решения задач по физике..... 83
14. **Минаков В.И., Акиндинова Е.В., Желтикова О.О.** Применение метода суммирования в решении олимпиадных задач..... 89
15. **Оленикова Ю.К., Ройтенберг В.Ш.** О Всероссийской студенческой олимпиаде по математике. Ярославль, 2025..... 96
16. **Панишева О.В.** Становление отечественной математической терминологии: исторический и дидактический аспекты..... 104
17. **Сапогов В.Р.** Об использовании теории игр в профориентационной работе..... 112

18. **Соколов А.В., Шемякина И.Е.** Использование рейтингового метода оценки при отборе участников в олимпиадном движении..... 117
19. **Шкадова А.Р., Войтко И.В.** О преподавании студентам понятий катенарии и катеноида..... 122

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

20. **Гусаров А.В.** Об одном методе повышения быстродействия цифровых САУ..... 132
21. **Гусарова Н.И., Олейникова Е.В., Гусарова Л.А.** О статистических методах в лингвистике..... 138
22. **Лискина Е.Ю., Максимова Л.А.** Моделирование промышленного потенциала регионов центрального федерального округа: эконометрический анализ на основе обновленной логической модели..... 147
23. **Марьясин О.Ю., Бычков С.А.** Три подхода к моделированию движения беспилотных летательных аппаратов.. 157

Научное издание

МАТЕМАТИКА И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Выпуск 21

Ответственный редактор А.Н. Жаров

Редактор М.А. Канакотина

Подписано в печать 25.03.26. Формат 60x84 1/16. Бумага белая.

Гарнитура Таймс. Офсетная печать

Усл. печ. л. 9,76. Тираж 25. Заказ 14.

Ярославский государственный технический университет
152023, Ярославль, Московский пр., 88

Отпечатано в Копировальном центре ЯГТУ
152023, Ярославль, Московский пр., 88